فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

۱.۲ طبقه بندی معادلات مرتبه‌ی اول

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اولی که برای آن‌ها راه حل می‌توان ارایه نمود، به چهار دسته‌ی کلی به‌صورت زیر طبقه بندی می‌شوند:

(الف) معادلات جداشدنی
(ب) معادلات همگن
(پ) معادلات کامل
(ت) معادلات خطی

اگر معادله‌ی مرتبه‌ی اولی به هیچ کدام از چهار دسته بالا تعلق نداشته باشد، گاهی می‌توان با یک تعویض متغیر مناسب آن را به یکی از این چهار نوع معادله تبدیل نمود. اکنون به مطالعه‌ی هریک از معادلات فوق می‌پردازیم.

۲.۲ معادلات جداشدنی

تعریف ۱ — معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به‌صورت

$$M(x) + N(y)y' = 0 \qquad (۱)$$

یا شکل دیفرانسیلی معادل آن :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

را جداشدنی می نامیم. دلیل این نام گذاری آن است که در معادلات فوق متغیرهای x و y در جملات جداگانه ظاهر می‌شوند. در معادله‌ی (۱) فرض می‌کنیم $M(x)$ و $N(y)$ به ترتیب توابعی پیوسته از x و y هستند. برای حل معادله‌ی (۱)، یا تعیین جواب عمومی آن ، فرض می‌کنیم $y = f(x)$ جوابی از معادله باشد که بر یک بازه‌ی I تعریف شده است. پس داریم

$$M(x) + N(f(x))f'(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in I \tag{۲}$$

فرض می‌کنیم g یکی از توابع اولیه‌ی N باشد، یعنی $g' = N$. در این‌صورت (۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$g'(f(x))f'(x) = -M(x) \quad , \quad \forall x \in I \tag{۳}$$

بنا بر قاعده‌ی زنجیره‌ای ، طرف چپ مشتق تابع $g(f(x))$ است. پس از (۳) نتیجه می‌شود

$$g(f(x)) = -\int M(x)dx + c \tag{۴}$$

اگر قرار دهیم $y = f(x)$ ، آن‌گاه از (۴) داریم

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \tag{۵}$$

پس، اگر تابع $y = f(x)$ جواب (۱) باشد، آن‌گاه به‌ازای ثابت c ای این تابع در (۵) صدق می‌کند. برعکس ، اگر $y = f(x)$ در (۵) صدق کند، آن‌گاه با مشتق گیری از (۵) ، معادله‌ی (۲) به‌دست می آید که نشان می‌دهد $y = f(x)$ جواب (۱) است. به این ترتیب ثابت می‌شود که (۵) شامل همه‌ی جواب‌های (۱) می‌باشد، یا به عبارت دیگر جواب عمومی (۱) است.

مثال ۱ — جواب عمومی معادله‌ی مرتبه‌ی اول

$$y' = e^{x+y}$$

را به‌دست آورده و یک جواب خصوصی را که در شرط $y(0) = 0$ صدق می‌کند، تعیین نمایید.

حل – معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y$$

یا

$$e^x dx - e^{-y} dy = ۰ \qquad (٦)$$

معادله‌ی (٦) جداشدنی است. با انتگرال‌گیری داریم

$$\int e^x dx - \int e^{-y} dy = c$$

و جواب عمومی چنین است

$$e^x + e^{-y} = c$$

حال c را طوری تعیین می‌کنیم که شرط $y(۰) = ۰$ برقرار باشد. با قرار دادن $x = ۰$ و $y = ۰$ در جواب عمومی، $c = ۲$ به‌دست می‌آید. پس جواب خصوصی به‌صورت ضمنی چنین است

$$e^x + e^{-y} = ۲$$

اگر این معادله را نسبت به y حل کنیم، جواب به‌صورت صریح به‌دست می‌آید:

$$y = -\ln(۲ - e^x)$$

این جواب برای $x < \ln ۲$ تعریف شده است.

مثال ۲ – مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را حل کنید.

$$y' = ۱ + x^۲ + y^۲ + x^۲y^۲ \quad , \quad y(۰) = ۱$$

حل – می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} = (۱ + x^۲)(۱ + y^۲)$$

یا

$$(۱ + x^۲)dx = \frac{dy}{۱ + y^۲}$$

متغیرها از هم جدا شده‌اند، انتگرال می‌گیریم

$$\int (۱ + x^۲)dx + c = \int \frac{dy}{۱ + y^۲}$$

یا

$$x + \frac{x^۳}{۳} + c = \tan^{-۱} y$$

پس، جواب عمومی چنین است

$$y = \tan\left(x + \frac{x^۳}{۳} + c\right)$$

با به‌کار بردن شرط اولیه‌ی $y(۰) = ۱$ به‌دست می‌آوریم، $c = \frac{\pi}{۴}$. بنابراین جواب مسأله عبارت است از

$$y = \tan\left(x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{\pi}{۴}\right)$$

مثال ۳ — معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲x(y + ۱)dx + (x^۲ - ۱)dy = ۰ \qquad (۷)$$

حل — با تقسیم طرفین معادله بر $(x^۲ - ۱)(y + ۱)$ متغیرها جدا می‌شوند، و داریم

$$\frac{۲x}{x^۲ - ۱}dx + \frac{۱}{y + ۱}dy = ۰ \quad , \quad x^۲ \neq ۱ \quad , \quad y \neq -۱$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق خواهیم داشت

$$\ln|x^۲ - ۱| + \ln|y + ۱| = c$$

یا

$$\ln|(x^۲ - ۱)(y + ۱)| = c$$

از این‌جا

$$|(x^۲ - ۱)(y + ۱)| = e^c$$

یا

$$(x^{۲}-۱)(y+۱)=\pm e^{c}$$

از آن‌جایی که c یک ثابت دلخواه است، پس $\pm e^{c}$ نیز یک ثابت دلخواه ولی غیر صفر است. اگر قرار دهیم $c_{۱}=\pm e^{c}$ ، آن‌گاه

$$(x^{۲}-۱)(y+۱)=c_{۱}$$

یا

$$y=-۱+\frac{c_{۱}}{x^{۲}-۱}\quad,\quad c_{۱}\neq ۰ \tag{۸}$$

معادله‌ی (۸) به‌ازای هر $x\neq ۱$ و $x\neq -۱$ جواب (۷) می‌باشد.

بحث — توجه کنید که تابع ثابت $y(x)\equiv -۱$ نیز جواب (۷) است ، اما این جواب به‌ازای هیچ ثابت $c_{۱}\neq ۰$ از خانواده‌ی (۸) به‌دست نمی‌آید. از این رو، این خانواده شامل همه‌ی جواب‌های معادله نیست. ولی اگر شرط $c_{۱}\neq ۰$ برداشته شود، آن‌گاه جواب عمومی معادله چنین است

$$y=-۱+\frac{c}{x^{۲}-۱}$$

که در آن c می‌تواند همه‌ی مقادیر حقیقی را اختیار کند.

۳.۲ معادلات همگن

تعریف ۱ — تابع دو متغیری $f(x,y)$ را **همگن** و از درجه‌ی n می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $\lambda>۰$ و به‌ازای هر دو زوج (x,y) و $(\lambda x,\lambda y)$ که در حوزه‌ی تعریف تابع باشند، داشته باشیم

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n}f(x,y)$$

مثال ۱ — تابع $f(x,y)=x^{۲}+xy$ همگن و از درجه‌ی ۲ است ، زیرا

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{۲}x^{۲}+\lambda^{۲}xy=\lambda^{۲}(x^{۲}+xy)=\lambda^{۲}f(x,y)$$

مثال ۲ — تابع $f(x,y)=\sin(\frac{y}{x})$ همگن و از درجه‌ی صفر است، زیرا

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)=\sin(\frac{y}{x})=\lambda^{0} f(x,y)$$

مثال ۳ — تابع $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$ همگن و از درجه‌ی ۱— است.

تعریف ۲ — معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0 \tag{1}$$

یا شکل دیفرانسیلی آن

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

را **همگن** می‌نامیم هرگاه توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هر دو همگن و از یک درجه باشند.

مثال ۴ — معادله‌ی

$$(x^{2}+y^{2})dx+2xydy=0$$

همگن است، زیرا توابع $M(x,y)=x^{2}+y^{2}$ و $N(x,y)=2xy$ هردو همگن و از درجه‌ی ۲ هستند.

اگر در معادله‌ی (۱) توابع M و N همگن و از درجه‌ی m باشند، آن‌گاه داریم

$$M(x,y)=x^{m}M\left(1,\frac{y}{x}\right)\ ,\ N(x,y)=x^{m}N\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

در این‌صورت معادله‌ی (۱) به‌شکل زیر نوشته می‌شود

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

تعریف می‌کنیم

$$F(\frac{y}{x})=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

آن‌گاه معادله‌ی همگن (۱) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{dy}{dx}=F(\frac{y}{x}) \tag{2}$$

برای حل معادله‌ی (۲)، قرار می‌دهیم $v = \frac{y}{x}$ یا $y = xv$. آن‌گاه داریم

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

و با قرار دادن در (۲) خواهیم داشت

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

یا

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v} \qquad (۳)$$

معادله‌ی (۳) یک معادله‌ی دیفرانسیل جداشدنی است، و اگر خانواده جواب‌های آن $G(x, v, c) = ۰$ باشد، آن‌گاه خانواده جواب‌های (۱) چنین است

$$G\left(x, \frac{y}{x}, c\right) = ۰$$

مثال ۵ — مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را حل کنید.

$$(x^{۲} + y^{۲})dx + ۲xydy = ۰ \ , \ y(۱) = -۱ \qquad (۴)$$

حل — معادله همگن است؛ آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{۲} + y^{۲}}{۲xy} = \frac{-۱}{۲}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

قرار می‌دهیم $y = xv$. آن‌گاه داریم

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{-۱}{۲}\left(\frac{۱}{v} + v\right)$$

یا، پس از اختصار معادله‌ی جداشدنی زیر را خواهیم داشت

$$\frac{dx}{x} + \frac{۲v}{۱ + ۳v^{۲}}dv = ۰$$

با انتگرال‌گیری داریم

$$\ln|x| + \frac{۱}{۳}\ln(۱ + ۳v^{۲}) = c$$

یا

$$\ln|x|^{3} + \ln(1 + 3v^{2}) = c' \qquad (c' = 3c)$$

یا

$$\ln|x^{3}(1 + 3v^{2})| = \ln c_{1} \qquad (\ln c_{1} = c')$$

از این‌جا

$$x^{3}(1 + 3v^{2}) = c_{2} \quad , \quad (c_{2} = \pm c_{1})$$

با قرار دادن $y = xv$ ، جواب‌های معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$x^{3} + 3xy^{2} = c_{2}$$

از شرط اولیه $y(1) = -1$ نتیجه می‌شود $c_{2} = 4$. پس

$$x^{3} + 3xy^{2} = 4$$

و از این‌جا داریم

$$y = \pm\sqrt{\frac{4 - x^{3}}{3x}}$$

جوابی که در شرط $y(1) = -1$ صدق می‌کند عبارت است از

$$y = -\sqrt{\frac{4 - x^{3}}{3x}}$$

مثال ٦ — جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را تعیین کنید.

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)y' = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x \quad , \quad y(1) = 0$$

حل — معادله همگن است. می‌نویسیم

$$y' = \frac{y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x}{x\sin\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + 1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

قرار می‌دهیم $y = xv$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v\sin v + ۱}{\sin v} = v + \frac{۱}{\sin v}$$

یا

$$\frac{dx}{x} = \sin v \; dv$$

با انتگرال‌گیری داریم

$$\ln|x| = -\cos v + c$$

و جواب‌ها عبارتند از

$$\ln|x| = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

برای یافتن جواب خصوصی مسأله، در جواب عمومی قرار می‌دهیم $x = ۱$ و $y = ۰$. در این‌صورت $c = ۱$ ، و جواب مطلوب چنین است

$$\ln|x| = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) + ۱ \qquad (۵)$$

یعنی، تابع $y = y(x)$ که به‌صورت ضمنی با (۵) تعریف می‌شود، جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی داده شده است.

۴.۲ معادلات دیفرانسیل کامل

تعریف ۱ — معادله‌ی مرتبه‌ی اول

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰ \qquad (۱)$$

را **کامل** گوییم هرگاه یک تابع دو متغیری $f(x,y)$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$df = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (۲)$$

بنابراین، اگر (۱) کامل باشد، آن‌گاه با توجه به (۲) داریم

$$df = ۰$$

پس، تابع $f(x,y)$ ثابت می‌باشد، و در نتیجه خانواده جواب‌های (۱) به‌صورت زیر است

$$f(x,y) = c \tag{۳}$$

مثال ۱ — معادله‌ی دیفرانسیل

$$۳x^۲dx + ۲ydy = ۰ \tag{۴}$$

کامل است، زیرا اگر تعریف کنیم $f(x,y) = x^۳ + y^۲$ ، آن‌گاه داریم

$$df = ۳x^۲dx + ۲ydy$$

و از این رو جواب‌های (۴) چنین هستند

$$x^۳ + y^۲ = c$$

اکنون دو سئوال مطرح می‌شود :

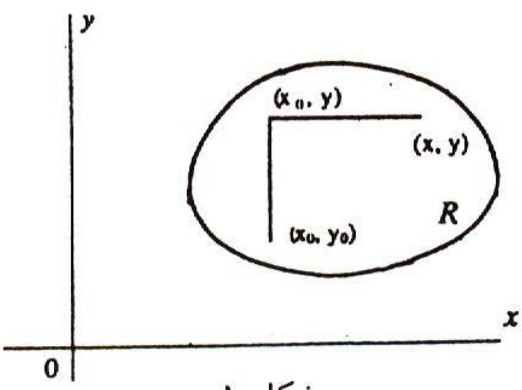
۱ — آیا قاعده‌ای وجود دارد که به کمک آن بتوان بررسی نمود معادله (۱) کامل است یا نه ؟

۲ — اگر معادله‌ی (۱) کامل است چگونه آن را حل کنیم ؟

پاسخ سئوال ۱ در قضیه‌ی زیر داده می‌شود.

قضیه‌ی ۱ — فرض کنید در معادله‌ی (۱) توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ در یک ناحیه‌ی R از صفحه‌ی xy پیوسته و در این ناحیه دارای مشتق های جزیی مرتبه‌ی اول پیوسته باشند. آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن که معادله‌ی (۱) کامل باشد آن است که

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \quad , \quad \forall (x,y) \in R \tag{۵}$$



شکل ۱

اثبات — نقطه‌ی ثابت $(x_\circ, y_\circ)$ را در R انتخاب نموده، و برای هر (x,y) در R به‌طوری که خط شکسته‌ی مطابق شکل ۱ در R قرار گیرد، تابع $f(x,y)$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x,y) = \int_{x_\circ}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ, s)ds \qquad (٦)$$

ابتدا فرض کنید شرط (۵) برقرار باشد. از (٦) داریم

$$f_x(x,y) = M(x,y)$$

و

$$f_y(x,y) = \int_{x_\circ}^{x} M_y(t,y)dt + N(x_\circ, y) = \int_{x_\circ}^{x} N_t(t,y)dt + N(x_\circ, y)$$

$$= N(t,y)|_{x_\circ}^{x} + N(x_\circ, y) = N(x,y)$$

پس

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

که ثابت می‌کند معادله‌ی (۱) کامل است.

برعکس، فرض کنید معادله‌ی (۱) کامل باشد. پس تابع دو متغیری $f(x,y)$ وجود دارد به‌طوری که

$$df = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (۷)$$

از طرفی

$$df = f_x dx + f_y dy \qquad (۸)$$

از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود

$$f_x = M \quad , \quad f_y = N \qquad (۹)$$

از معادلات (۹) داریم

$$f_{xy} = M_y \quad , \quad f_{yx} = N_x \qquad (۱۰)$$

با توجه به‌این که M_y و N_x پیوسته هستند، از معادلات (۱۰) نتیجه می‌شود

$$M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

و اثبات قضیه کامل می‌شود.

نتیجه ـ اگر معادله‌ی (۱) کامل باشد، خانواده جواب‌های آن با توجه به (٦) چنین است

$$\int_{x_\circ}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ, s)ds = c \qquad (۱۱)$$

مثال ۲ — نشان دهید معادله‌ی زیر کامل است، و جواب‌های آن را بیابید.

$$e^y dx + (xe^y + ۲y)\,dy = \circ$$

حل — در این مثال

$$M = e^y \quad , \quad N = xe^y + ۲y$$

و

$$M_y = e^y \quad , \quad N_x = e^y$$

پس معادله کامل است. جواب‌های آن از (۱۱) با انتخاب $(x_\circ, y_\circ) = (\circ, \circ)$ چنین است

$$\int_{\circ}^{x} M(t,y)dt + \int_{\circ}^{y} N(\circ, s)ds = c$$

یا

$$\int_{\circ}^{x} e^y dt + \int_{\circ}^{y} ۲s ds = c$$

و خانواده جواب‌ها به‌صورت ضمنی عبارت است از

$$xe^y + y^۲ = c$$

تذکر ۱ ـ دانشجویان گاهی در انتخاب نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ در فرمول (۱۱) با مشکل رو برو می‌شوند. از این رو، روش‌های دیگری برای تعیین تابع $f(x,y)$ با مثال‌های زیر تشریح خواهد شد.

مثال ۳ — معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(3x^2+4xy^2)dx+(2y-3y^2+4x^2y)dy=0$$

حل — در این مثال

$$M=3x^2+4xy^2 \quad , \quad N=2y-3y^2+4x^2y$$

و

$$M_y=8xy \quad , \quad N_x=8xy$$

پس معادله کامل است. جواب‌های آن را با روش دسته بندی پیدا می‌کنیم. برای این منظور معادله‌ی داده شده را به‌شکل زیر می‌نویسیم

$$3x^2dx+(4xy^2dx+4x^2ydy)+(2y-3y^2)dy=0$$

یا

$$d(x^3)+d(2x^2y^2)+d(y^2-y^3)=0$$

$$d(x^3+2x^2y^2+y^2-y^3)=0$$

بنابراین ، جواب‌ها عبارتند از

$$x^3+2x^2y^2+y^2-y^3=c$$

تذکر ۲ ـ روش دسته بندی که در این مثال تشریح گردید تنها برای معادلات کامل کاربرد دارد.

مثال ۴ — معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(2y^2-4x+5)dx+(4-2y+4xy)dy=0$$

حل — داریم $M=2y^2-4x+5$ ، $N=4-2y+4xy$ و $M_y=N_x$. یعنی، معادله کامل است. با این مثال روش سومی برای معادلات کامل ارایه می‌دهیم. از آن‌جایی که

معادله کامل است، پس یک تابع دو متغیری f وجود دارد به‌طوری که $f_x = M$ و $f_y = N$. بنابراین

$$f_x(x,y) = ۲y^۲ - ۴x + ۵$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x داریم

$$f(x,y) = ۲xy^۲ - ۲x^۲ + ۵x + h(y) \qquad (۱۲)$$

که $h(y)$ تابعی دلخواه است و ثابت انتگرال‌گیری می‌باشد. برای تعیین $h(y)$، از رابطه‌ی $f_y = N$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$f_y(x,y) = ۴xy + h'(y) = ۴ - ۲y + ۴xy$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$h'(y) = ۴ - ۲y$$

پس

$$h(y) = ۴y - y^۲$$

در (۱۲) به‌جای $h(y)$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$f(x,y) = ۲xy^۲ - ۲x^۲ + ۵x + ۴y - y^۲$$

پس، خانواده جواب‌ها چنین است

$$۲xy^۲ - ۲x^۲ + ۵x + ۴y - y^۲ = c$$

۵.۲ عامل انتگرال ساز

اگر معادله‌ی دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰ \qquad (۱)$$

کامل نباشد، یعنی $M_y \neq N_x$ ، گاهی می‌توان یک تابع غیر صفر μ که بستگی دارد به x یا y یا هر دو متغیر x و y ، یافت به‌طوری که معادله‌ی

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \qquad (۲)$$

کامل باشد، یعنی $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. در این‌صورت تابع μ یک عامل انتگرال ساز معادله‌ی (۱) نامیده می‌شود.

مثال ۱ — معادله‌ی

$$2ydx + xdy = 0 \qquad (۳)$$

کامل نیست، ولی با ضرب معادله در تابع $\mu(x) = x$ ، معادله کامل می‌شود، یعنی

$$2xydx + x^2 dy = 0 \qquad (۴)$$

کامل است. بسادگی می‌توان دید که معادلات (۳) و (۴) دارای جواب عمومی یکسان $yx^2 = c$ هستند. به‌طور کلی، ثابت می‌شود که اگر معادله‌ی (۲) کامل و دارای جواب عمومی

$$f(x, y) = c \qquad (۵)$$

باشد، آن‌گاه (۵) جواب عمومی (۱) نیز هست.

تعیین عامل انتگرال ساز

اگر (۲) کامل باشد، داریم

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

یا

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x$$

پس، تابع $\mu(x, y)$ لزوماً در معادله‌ی با مشتق‌های جزیی زیر صدق می‌کند

$$N\mu_x - M\mu_y = (M_y - N_x)\mu \qquad (۶)$$

از حل این معادله عامل انتگرال ساز به‌دست می‌آید. حل معادله‌ی (٦) در حالت کلی مشکل و یا امکان پذیر نیست، و به هر حال از بحث ما خارج است. از این رو معادله‌ی (٦) را در دو حالت خاص زیر بررسی می‌کنیم

(الف) — فرض کنید معادله‌ی (۱) دارای عامل انتگرال سازی است که بستگی تنها به x دارد، یعنی، $\mu = \mu(x)$. در این‌صورت در (٦)، $\mu_y = 0$ و $\mu_x = \frac{d\mu}{dx}$ ، و معادله‌ی (٦) به‌صورت زیر در می‌آید

$$N\frac{d\mu}{dx} = (M_y - N_x)\mu \tag{۷}$$

یا

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \tag{۸}$$

طرف چپ (۸) تابعی است تنها از x ، پس لزوماً طرف راست نیز تابعی از x خواهد بود. تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \frac{M_y - N_x}{N} \tag{۹}$$

آن‌گاه معادله‌ی جدا پذیر زیر را خواهیم داشت

$$\frac{d\mu}{\mu} = g(x)dx$$

یک جواب این معادله عبارت است از

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} \tag{۱۰}$$

پس، عامل انتگرال ساز از (۱۰) به‌دست می‌آید.

(ب) — فرض کنید معادله‌ی (۱) دارای عامل انتگرال سازی است که بستگی تنها به y دارد، یعنی ، $\mu = \mu(y)$. در این حالت در معادله‌ی (٦)، $\mu_x = 0$ و $\mu_y = \frac{d\mu}{dy}$ ، و (٦) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$-M\frac{d\mu}{dy} = (M_y - N_x)\mu$$

یا

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M} \tag{۱۱}$$

طرف چپ (۱۱) تابعی است تنها از y، پس لازم است طرف راست نیز تابعی از y باشد. اگر تعریف کنیم

$$h(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$$

آن‌گاه از معادله‌ی جداشدنی (۱۱) نتیجه می‌شود که عامل انتگرال ساز به‌صورت زیر است

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy} \qquad (۱۲)$$

برعکس، اگر برای معادله‌ی (۱)، عبارت طرف راست (۸) بستگی تنها به x داشته باشد، آن‌گاه این معادله دارای عامل انتگرال سازی است که تابعی است تنها از x، و این عامل از (۱۰) به‌دست می‌آید (چرا؟). همین‌طور، اگر طرف راست (۱۱) بستگی تنها به y داشته باشد، آن‌گاه معادله‌ی (۱) دارای عامل انتگرال سازی است که تابعی است تنها از y، و این عامل از (۱۲) حاصل می‌شود.

مثال ۲ — یک عامل انتگرال ساز برای معادله‌ی

$$(۴xy + ۳y^۲ - x)dx + x(x + ۲y)dy = ۰$$

به‌دست آورید، و سپس جواب‌های آن را بیابید.

حل — در این مثال

$$M(x,y) = ۴xy + ۳y^۲ - x \quad , \quad N(x,y) = x(x + ۲y)$$

پس

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{۲x + ۴y}{x(x + ۲y)} = \frac{۲}{x}$$

در نتیجه، یک عامل انتگرال ساز برای معادله چنین است

$$\mu(x) = e^{\int \frac{۲}{x}dx} = e^{۲\ln|x|} = e^{\ln x^۲} = x^۲$$

طرفین معادله‌ی داده شده رادر $x^۲$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$(۴x^۳y + ۳x^۲y^۲ - x^۳)dx + (x^۴ + ۲x^۳y)dy = ۰$$

اکنون معادله کامل است و جواب‌های آن به‌صورت زیر می‌باشند

$$x^۴y + x^۳y^۲ - \frac{x^۴}{۴} = c$$

مثال ۳ — یک عامل انتگرال ساز برای معادله‌ی زیر به‌دست آورده، و سپس آن را حل کنید.

$$(\sin y + \cos y)dx + ۲x\cos y dy = ۰$$

حل — معادله کامل نیست، اما داریم

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\sin y + \cos y}{\sin y + \cos y} = ۱$$

اگر تعریف کنیم $h(y) \equiv ۱$، آن‌گاه عامل انتگرال ساز معادله چنین است

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy} = e^y$$

با ضرب معادله در e^y، خواهیم داشت

$$e^y(\sin y + \cos y)dx + ۲xe^y\cos y dy = ۰$$

جواب‌های این معادله کامل چنین هستند

$$xe^y(\sin y + \cos y) = c$$

۶.۲ معادلات خطی

این معادلات به شکل کلی زیر هستند

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (۱)$$

که $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته از x می‌باشند. برای تعیین جواب‌های (۱)، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$(q(x) - p(x)y)\,dx - dy = 0 \tag{۲}$$

اگر تعریف کنیم

$$M(x,y) = q(x) - p(x)y \quad , \quad N(x,y) \equiv -1$$

آن‌گاه معادله‌ی (۲) به‌شکل $M dx + N dy = 0$ است، که در حالت کلی کامل نیست. بنا به قسمت قبل داریم

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-p(x) - 0}{-1} = p(x)$$

پس معادله‌ی (۲) یا معادل آن (۱) دارای عامل انتگرال سازی است به‌صورت

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{۳}$$

طرفین معادله‌ی (۱) را در $\mu(x)$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x) y e^{\int p(x)dx} = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int p(x)dx}\right) = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

و با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$y e^{\int p(x)dx} = \int \left(q(x) e^{\int p(x)dx}\right) dx + c$$

و جواب عمومی (۱) به‌صورت صریح چنین است

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx + c\right] \tag{۴}$$

که $\mu(x)$ با (۳) تعریف می‌شود.

مثال ۱ — جواب عمومی معادله‌ی مرتبه‌ی اول

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

را به‌دست آورده، و یک جواب خصوصی آن را که در شرط $y(0) = 1$ صدق می‌کند، بیابید.

حل — معادله خطی است و عامل انتگرال ساز آن عبارت است از

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$$

جواب عمومی معادله از فرمول (۴) حاصل می‌شود. داریم

$$y = e^{-x}\left[\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}dx + c\right]$$

با استفاده از تعویض متغیر $e^x = u$ ، خواهیم داشت

$$y = e^{-x}\left[\tan^{-1}(e^x) + c\right] \qquad (5)$$

برای تعیین جوابی از معادله که در شرط $y(0) = 1$ صدق کند، در (۵) قرار می‌دهیم $x = 0$ و $y = 1$. آن‌گاه به‌دست می‌آوریم $c = 1 - \frac{\pi}{4}$. پس جواب مطلوب چنین است

$$y = e^{-x}\left[\tan^{-1}(e^x) + 1 - \frac{\pi}{4}\right]$$

مثال ۲ — جواب عمومی معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$xy' + y = 3x^2 \qquad (6)$$

حل — معادله خطی است و برای $x \neq 0$ داریم

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x \qquad (7)$$

عامل انتگرال ساز معادله‌ی (۷) را به‌دست می‌آوریم

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = |x|$$

اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $\mu(x) = x$ ، و جواب‌های معادله طبق فرمول (۴) به‌صورت زیر است

$$y = \frac{1}{x}\left[\int 3x^2 dx + c_1\right] = x^2 + \frac{c_1}{x}$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $\mu(x) = -x$ ، و در این حالت داریم

$$y = -\frac{1}{x}\left[\int -3x^2 dx + c_2\right] = x^2 - \frac{c_2}{x}$$

از آن‌جایی که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند، پس جواب عمومی معادله‌ی (٦) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$y = x^2 + \frac{c}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

که در آن c یک ثابت دلخواه است.

۲.۷ معادلات برنولی

این معادلات به‌شکل کلی زیر هستند

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{1}$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته از x می‌باشند، و n یک عدد حقیقی است. این معادلات با یک تعویض متغیر به معادلات خطی تبدیل می‌شوند. اگر در (۱) $n = 0$ یا $n = 1$، آن‌گاه معادله خطی است. پس فرض کنید $n \neq 0$ و $n \neq 1$. در این حالت برای حل معادله‌ی (۱) طرفین آن را بر y^n تقسیم می‌کنیم. داریم

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \tag{2}$$

قرار می‌دهیم $u = y^{1-n}$ ، که u تابعی است از x. داریم

$$u' = (1-n)y'y^{-n}$$

با قرار دادن در (۲)، معادله‌ی زیر نتیجه می‌شود

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x) \tag{3}$$

که یک معادله‌ی خطی است.

مثال ۱ — جواب عمومی معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$xy' - \frac{y}{۲\ln x} = y^{۲} \quad , \quad x > ۱ \tag{۴}$$

حل — معادله برنولی است، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$y^{-۲}y' - \frac{۱}{۲x\ln x}\, y^{-۱} = \frac{۱}{x}$$

قرار می‌دهیم $u = y^{-۱}$ ، آن‌گاه $u' = -y'y^{-۲}$. معادله با این تعویض متغیر به‌صورت خطی زیر نوشته می‌شود

$$u' + \frac{۱}{۲x\ln x}u = -\frac{۱}{x} \tag{۵}$$

عامل انتگرال ساز معادله چنین است

$$\mu(x) = e^{\int \frac{۱}{۲x\ln x}\, dx} = e^{\frac{۱}{۲}\ln(\ln x)} = (\ln x)^{\frac{۱}{۲}}$$

بنابراین، جواب عمومی (۵) عبارت است از

$$u = (\ln x)^{-\frac{۱}{۲}} \left[\int -\frac{۱}{x}(\ln x)^{\frac{۱}{۲}}\, dx + c\right]$$

یا

$$u = -\frac{۲}{۳}\ln x + c\,(\ln x)^{-\frac{۱}{۲}}$$

پس، جواب عمومی معادله‌ی برنولی (۴) به‌صورت زیر خواهد بود

$$y = \frac{۱}{-\frac{۲}{۳}\ln x + c\,(\ln x)^{-\frac{۱}{۲}}}$$

مثال ۲ — معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲y dx + x(۶x^{۲} - y - ۱)dy = ۰$$

حل — معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dx}{dy} - (\frac{y+۱}{۲y})x = -\frac{۳}{y}x^۳$$

اگر نقش x و y را باهم عوض کنیم، یا قرار دهیم $x = Y$ و $y = X$ ، آن گاه معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{dY}{dX} - (\frac{X+۱}{۲X})Y = -\frac{۳}{X}Y^۳$$

این معادله برنولی است. با تقسیم طرفین معادله بر $Y^۳$ ، و قرار دادن $u = Y^{-۲}$ ، پس از اختصار معادله‌ی خطی زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{du}{dX} + \left(\frac{X+۱}{X}\right)u = \frac{۶}{X}$$

جواب عمومی چنین است

$$u = \frac{۶}{X} + \frac{c}{X}e^{-X}$$

یا

$$\frac{۱}{Y^۲} = \frac{۶}{X} + \frac{c}{X}e^{-X}$$

سرانجام، جواب عمومی معادله بر حسب متغیرهای اصلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{۱}{x^۲} = \frac{۶}{y} + \frac{c}{y}e^{-y}$$

۸.۲ معادلات کِلِرو

هر معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت

$$y = xy' + f(y')$$

یا

$$y = xp + f(p) \qquad (۱)$$

که در آن $p = \frac{dy}{dx}$ ، معادله‌ی کِلِرو نامیده می‌شود. برای حل معادله‌ی (۱)، با فرض آن‌که y'' موجود باشد، از طرفین آن نسبت به x مشتق می‌گیریم. داریم

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}f'(p)$$

یا

$$(x + f'(p))\,\frac{dp}{dx} = 0 \qquad (۲)$$

از (۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{یا} \quad x = -f'(p)$$

اگر $\frac{dp}{dx} = 0$، آن‌گاه داریم $p = c$ ، و با قرار دادن در معادله‌ی (۱) به‌دست می‌آوریم

$$y = cx + f(c) \qquad (۳)$$

که معادله‌ی یک خانواده خط مستقیم در صفحه است، و به‌ازای هر مقدار c در (۱) صدق می‌کند. اگر $x = -f'(p)$ ، آن‌گاه از معادله‌ی (۱) نتیجه می‌شود

$$y = -pf'(p) + f(p)$$

اگر $f(p)$ ثابت نباشد، یا این که تابعی خطی از p نباشد، در این‌صورت

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases} \qquad (۴)$$

معادلات پارامتری یک منحنی در صفحه هستند که p پارامتر است ، و این منحنی نیز جواب (۱) است. از آن‌جایی که این جواب در حالت کلی یک خط مستقیم نیست، از این رو به خانواده‌ی (۳) تعلق نداشته و بنابراین جواب غیر عادی معادله (۱) می‌باشد. حال نشان می‌دهیم این جواب غیر عادی پوش خانواده(۳) است، یعنی ، منحنی با معادلات (۴) بر همه‌ی خطوط (۳) مماس است. برای اثبات این مطلب، خط مماس در یک نقطه‌ی دلخواه برمنحنی (۴)، مثلاً در نقطه‌ای با پارامتر p_0 را می‌نویسیم. شیب این خط عبارت است از

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{p_0} = \left(\frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}}\right)_{p_0} = \left(\frac{-f'(p) - pf''(p) + f'(p)}{-f''(p)}\right)_{p_0} = p_0$$

پس معادله‌ی خط مماس به‌صورت زیر است

$$y - [-p_0 f'(p_0) + f(p_0)] = p_0\,(x + f'(p_0))$$

یا پس از اختصار

$$y = xp_{\circ} + f(p_{\circ})$$

که یکی از خطوط خانواده‌ی (۳) است.

مثال ۱ — معادله‌ی کلرو زیر را حل نموده و در طبیعت جواب‌ها بحث کنید.

$$y = xy' - \frac{۱}{۴}(y')^{۲} \qquad (۵)$$

حل — معادله‌ی داده شده را با قرار دادن $y' = p$ به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$y = xp - \frac{p^{۲}}{۴}$$

پس، در این‌جا $f(p) = -\frac{p^{۲}}{۴}$. همان‌طور که دیدیم با قراردادن $p = c$ ، جواب عمومی به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$y = cx - \frac{c^{۲}}{۴} \qquad (٦)$$

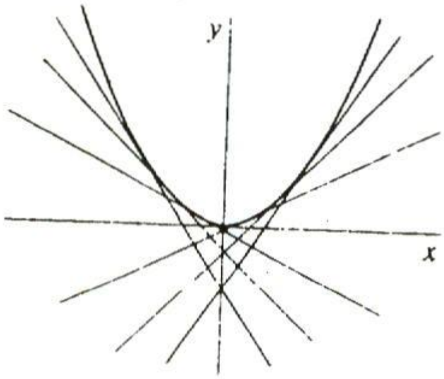
معادلات پارامتری جواب غیرعادی، با توجه به معادلات (۴) عبارتند از

$$\begin{cases} x = \frac{p}{۲} \\ y = p(\frac{p}{۲}) - \frac{p^{۲}}{۴} = \frac{p^{۲}}{۴} \end{cases}$$

با حذف پارامتر p ، جواب غیرعادی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$y = x^{۲}$$

این سهمی بر همه‌ی خطوط (٦) مماس است(شکل ۲).



شکل ۲

تذکر — در حل معادله‌ی کلرو (۱)، یک حالت ممکن دیگر را هم باید منظور نمود؛ حالتی که در معادله‌ی (۲) یکی از دو عامل، برای مثال، $x + f'(p)$ به‌ازای بعضی مقادیر x ، و عامل دیگر، $\frac{dp}{dx}$ ، به‌ازای بقیه‌ی مقادیر x صفر شوند. برای روشن شدن مطلب، معادله‌ی کلرو مثال (۱) را مجدداً بررسی می‌کنیم. با مشتق‌گیری از (۵) نسبت به x ، به‌دست می آوریم

$$(x - \frac{۱}{۲}y')y'' = ۰$$

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد به‌طوری که

$$x - \frac{۱}{۲}y' = ۰ \quad , \quad x \geq a$$
$$y'' = ۰ \qquad , \quad x < a$$

پس، برای $x < a$ ، داریم $y' = c$ ، و با قرار دادن در معادله‌ی (۵) خواهیم داشت

$$y(x) = cx - \frac{c^۲}{۴} \quad , \quad x < a \tag{۷}$$

برای $x \geq a$ ، داریم $y' = ۲x$ ، و بنابراین

$$y(x) = x^۲ + c_۱ \quad , \quad x \geq a \tag{۸}$$

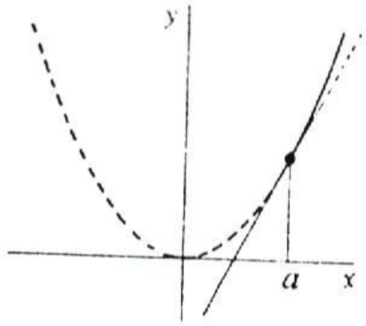
با قرار دادن (۸) در (۵) به‌دست می‌آوریم $c_۱ = ۰$. در نتیجه

$$y = x^۲ \quad , \quad x \geq a \tag{۹}$$

حال داریم $y(a) = a^۲$ ، و شرط پیوستگی جواب تعریف شده با (۷) و (۹) آن است که $c = ۲a$ (چرا؟). پس، جواب دیگری که برای معادله‌ی کلرو (۵) باید در نظر گرفت، چنین است

$$y(x) = \begin{cases} ۲ax - a^۲ & x < a \\ x^۲ & x \geq a \end{cases}$$

نمودار این جواب در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳

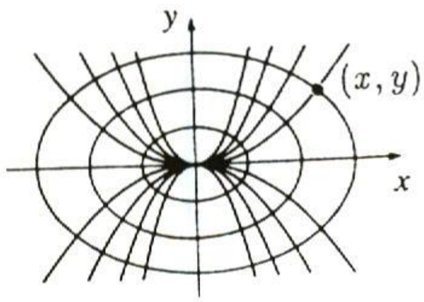
۹.۲ کاربردها

کاربرد در هندسه‌ی تحلیلی

مثال ۱ (مسیرهای قائم) — اگر c یک ثابت باشد، معادله‌ی

$$y = cx^{۲} \qquad (۱)$$

معادله‌ی یک خانواده سهمی است که در شکل (۴) نشان داده شده است.



شکل ۴

از هر نقطه (x,y) در صفحه بجز نقاط روی محور y ها، یک و تنها یک منحنی از خانواده‌ی (۱) می‌گذرد، و شیب آن منحنی از این خانواده که از نقطه‌ی (x,y) می‌گذرد، برابر است با $y' = ۲cx$. چون از معادله‌ی (۱) داریم $c = \frac{y}{x^{۲}}$ ، پس شیب منحنی‌های خانواده‌ی (۱) در نقطه‌ی (x,y) برابر است با

$$y' = \frac{۲y}{x} \quad , \quad x \neq ۰ \qquad (۲)$$

فرض کنید بخواهیم خانواده‌ی دیگری از منحنی‌ها پیدا کنیم که از هر نقطه‌ی (x,y) صفحه، یک منحنی از این خانواده دوم بگذرد، و بر منحنی خانواده اول که از همین نقطه می‌گذرد عمود باشد. پس، شیب این منحنی در نقطه‌ی (x,y) برابر است با

$$y' = -\frac{x}{۲y} \qquad (۳)$$

پس، مسأله یافتن منحنی هایی است که در معادله‌ی دیفرانسیل (۳) صدق کنند. این معادله جداشدنی است، و جواب عمومی آن یک خانواده بیضی به‌صورت زیر می‌باشد

$$\frac{x^{۲}}{k^{۲}} + \frac{y^{۲}}{\frac{k^{۲}}{۲}} = ۱$$

که k یک ثابت غیر صفر است. این بیضی‌ها در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. این خانواده را مسیرهای قائم سهمی‌های (۱) می‌نامند.

مثال ۲ (مسیرهای مایل) — مجدداً خانواده سهمی‌های (۱) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم خانواده دیگری از منحنی‌ها بیابیم به قسمی که هر منحنی از خانواده دوم که از نقطه‌ی (x,y) می‌گذرد، با منحنی خانواده اول که از همین نقطه می‌گذرد، زاویه‌ی $\frac{\pi}{4}$ بسازد. فرض کنید ϕ_1 و ϕ_2 به‌ترتیب زاویه‌های خطوط مماس بر منحنی‌های خانواده اول و دوم در نقطه‌ی (x,y)بامحور x ها باشند. با توجه به شکل ۵ داریم

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_2\tan\phi_1}$$

از آن‌جایی که $\tan\phi_2 = \frac{2y}{x}$ و $\tan\phi_1 = y'$ ، پس

$$\frac{\frac{2y}{x} - y'}{1 + (\frac{2y}{x})y'} = 1$$

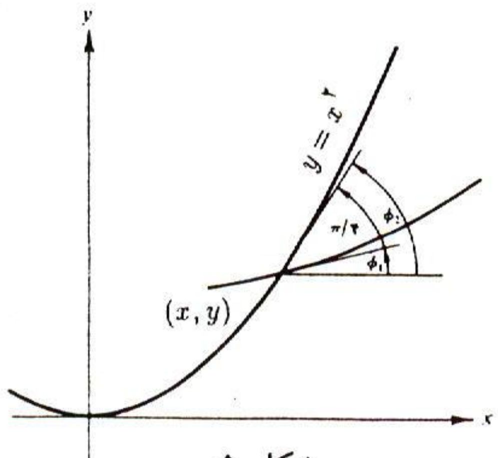
از این‌جا

$$y' = \frac{2y - x}{2y + x}$$

این معادله همگن است، و می‌توان نشان داد که جواب عمومی آن عبارت است از

$$\ln(2y^2 - xy + x^2) + \frac{6}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{4y - x}{\sqrt{7}x}\right) = k$$

که معادله‌ی خانواده منحنی‌های مطلوب می‌باشد.



شکل ۵

مثال ۳ — فرض کنید L خط مماس بر یک منحنی C در یک نقطه‌ی P آن، و A و B به ترتیب نقاط تقاطع خط با محور y ها و x ها باشد. معادله‌ی منحنی C را پیدا کنید به‌طوری که همواره $AB = AP$.

حل — اگر $y = f(x)$ معادله‌ی منحنی باشد، معادله‌ی خط L در نقطه‌ی $P(x, y)$ چنین است

$$Y - y = y'(X - y)$$

با قرار دادن $Y = 0$، طول نقطه‌ی B و با قرار دادن $X = 0$ عرض نقطه A به‌دست می‌آید. پس، مختصات A و B عبارتند از

$$A \left| \begin{array}{c} 0 \\ y - xy' \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{c} x - \frac{y}{y'} \\ 0 \end{array} \right.$$

چون می‌خواهیم نقطه‌ی A وسط قطعه خط BP باشد، پس با توجه به شکل ٦ باید نقاط B و M نسبت به O قرینه باشند، و در این‌صورت داریم

$$x + x - \frac{y}{y'} = 0$$

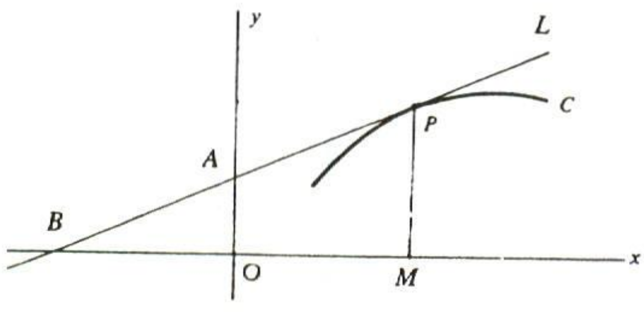
یا

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}$$

این معادله جداشدنی است و جواب عمومی آن عبارت است از

$$y^2 = cx$$

که معادله‌ی یک خانواده سهمی می‌باشد.



شکل ٦

کاربرد در فیزیک و مکانیک

مثال ۴ — گلوله‌ای به‌جرم m را با سرعت اولیه‌ی $v_{\circ}$ در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر مقاومت هوا در هر لحظه متناسب با مربع سرعت جسم در آن لحظه باشد، معین کنید گلوله تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

حل — فرض کنید در لحظه‌ی t، $y(t)$ و $v(t)$ به‌ترتیب نشان دهنده‌ی مسافت و سرعت باشند(شکل ۷). بنابر قانون دوم نیوتن، داریم

$$-mg - mkv^{۲} = m\tfrac{dv}{dt}$$

(mk ضریب تناسب)

می توان نوشت

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

پس

$$-mg - mkv^{۲} = mv\frac{dv}{dy}$$

یا

$$dy = \frac{-vdv}{g + kv^{۲}}$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$y = -\frac{۱}{۲k}\ln\left(g + kv^{۲}\right) + c \qquad (۴)$$

اگر جسم از نقطه‌ی O ، مبداء، پرتاب شود، آن‌گاه در لحظه‌ی $t = \circ$ داریم $y = \circ$ و $v = v_{\circ}$. با به‌کاربردن این شرایط در (۴) به‌دست می آوریم

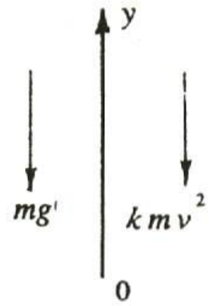
$$c = \frac{۱}{۲k}\ln\left(g + kv_{\circ}^{۲}\right)$$

پس

$$y = \frac{۱}{۲k}\ln\left(\frac{g + kv_{\circ}^{۲}}{g + kv^{۲}}\right)$$

گلوله موقعی به ماکزیمم ارتفاع خود می رسد که $v = \circ$. پس

$$y_{max} = \frac{۱}{۲k}\ln\left(۱ + \frac{kv_{\circ}^{۲}}{g}\right)$$



شکل ۷

مثال ۵ — یک دماسنج دمای یک اتاق را $۷۰°$ فارانهایت نشان می‌دهد. این دماسنج را در خارج اتاق، در هوای آزاد، که دما $۱۰°$ فارانهایت است قرار می‌دهیم. ۳ دقیقه بعد، دماسنج $۲۵°$ فارانهایت را نشان می‌دهد. معین کنید پس از چه مدت دماسنج $۲۰°$ فارانهایت را نشان خواهد داد.

حل — برای حل این مسأله از **قانون سرد شدن نیوتن** استفاده می‌کنیم. این قانون بیان می‌کند که:

« **آهنگ تغییر دمای یک جسم، با تفاضل دمای آن جسم و دمای محیطی که جسم در آن قرار می‌گیرد متناسب است** »

فرض کنید $u(t)$ دمایی که دماسنج در لحظه‌ی t نشان می‌دهد، باشد. بر طبق این قانون داریم

$$\frac{du}{dt} = -k(u - ۱۰) \qquad (۵)$$

در این رابطه $k > ۰$ ضریب تناسب است، و علامت منفی در (۵) برای آن است که با افزایش t ، u کاهش می‌یابد. فرض کنید در لحظه‌ی $t = ۰$، دماسنج را خارج از اتاق قرار دهیم، آن‌گاه داریم

$$u(۰) = ۷۰° \quad , \quad u(۳) = ۲۵°$$

جواب عمومی (۵) عبارت است از

$$u(t) = ۱۰ + ce^{-kt}$$

از شرط $u(۰) = ۷۰°$ نتیجه می‌شود، $c = ۶۰$. پس

$$u(t) = ۱۰ + ۶۰e^{-kt}$$

برای تعیین k، از شرط $u(۳) = ۲۵$ استفاده می‌کنیم، داریم

$$۲۵ = ۱۰ + ٦۰e^{-۳k}$$

یا

$$k = \frac{۱}{۳}\ln ۴$$

پس

$$u(t) = ۱۰ + ٦۰e^{-(\frac{۱}{۳}\ln ۴)t} \tag{٦}$$

حال با قرار دادن $u(t) = ۲۰$ در معادله‌ی (٦)، به‌دست می‌آوریم

$$t = \frac{۳\ln ٦}{\ln ۴} \approx ۳.۸۸ \text{ دقیقه}$$

و این زمانی است که دماسنج ۲۰° را نشان خواهد داد.

مثال ٦ — معادله‌ی یک آینه منحنی شکل را پیدا کنید به‌طوری که اشعه‌ای که از یک منبع نورانی واقع در مبداء بر آن می‌تابد، در امتداد محور x ها منعکس می‌شود.

حل — فرض کنید $y = f(x)$ معادله‌ی آینه باشد. با توجه به شکل ۸، در نقطه‌ی $P(x,y)$ شعاع تابش OP و شعاع انعکاس PB با خط مماس در P ، زاویه‌های مساوی می‌سازند(بنا به قانون انعکاس). داریم

$$\tan\alpha = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{۱ + \tan\alpha\tan\beta}$$

چون $\tan\alpha = y'$ و $\tan\beta = \frac{y}{x}$ ، معادله‌ی دیفرانسیل زیر نتیجه می‌شود

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - y'}{۱ + \frac{yy'}{x}}$$

یا

$$y = ۲xy' + y(y')^۲ \tag{۷}$$

برای حل معادله‌ی (۷)، طرفین آن را در y ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$y^۲ = ۲xyy' + y^۲(y')^۲ \tag{۸}$$

حال در (۸) قرار می‌دهیم، $v = y^۲$ و $v' = ۲yy'$. آن‌گاه معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$v = xv' + \frac{(v')^۲}{۴} \qquad (۹)$$

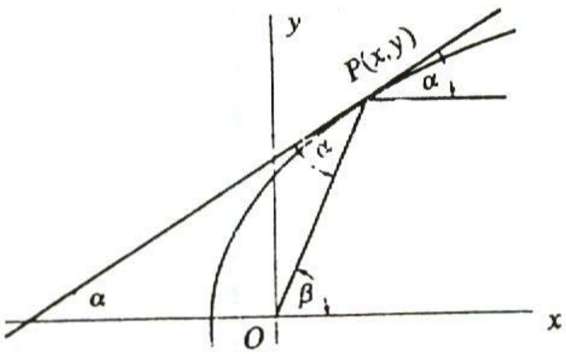
معادله‌ی (۹) یک معادله‌ی کلرو است، و به‌طوری که می‌دانیم خانواده خطوط

$$v = cx + \frac{c^۲}{۴}$$

جواب‌های آن هستند. چون $v = y^۲$ ، پس خانواده‌ی

$$y^۲ = c\left(x + \frac{c}{۴}\right) \qquad (۱۰)$$

جوابهای (۷) می‌باشند که برای هر $c > ۰$ ، معادله‌ی یک سهمی است که رأس آن در $(-\frac{c}{۴}, ۰)$ و کانون آن در مبداء مختصات قرار دارد، و این معادله‌ی آینه مطلوب است.



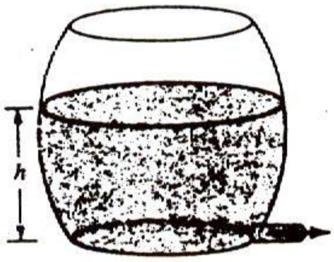
شکل ۸

خروج آب از یک روزنه

وقتی شیئی از حال سکون از ارتفاع h سقوط می‌کند، در موقع رسیدن به زمین سرعتی برابر با $\sqrt{۲gh}$ پیدا می‌کند، که $g = ۳۲\frac{ft}{sec^۲}$ شتاب گرانشی است. **قانون تریچلی** بیان می‌کند که این سرعت برابر سرعت خروج آب از واحد سطح یک خروجی از ظرفی مطابق شکل ۹ است. پس، اگر مساحت سطح مقطع A باشد، آن‌گاه $A\sqrt{۲gh}$ فوت مکعب در ثانیه آب از ظرف خارج می‌شود، که h ارتفاع لحظه‌ی آب است. اما تجربه نشان می‌دهد که اصطکاک و تراکم آب در نزدیکی خروجی، میزان آب خروجی را به $qA\sqrt{۲gh}$ فوت مکعب در ثانیه

کاهش می‌دهد، که $1 > q > 0$. بنابراین، اگر $v(t)$ حجم آب و $h(t)$ ارتفاع سطح آب در لحظه‌ی t باشد، آن‌گاه می‌توان گفت که آهنگ تغییر حجم آب، $\frac{dv}{dt}$ ، برابر است با

$$\frac{dv}{dt} = -qA\sqrt{2gh} \qquad (11)$$



شکل ۹

معادله‌ی (۱۱)، مدل ریاضی برای حل این نوع از مسایل است. واضح است که q بستگی به اندازه، شکل، سطح مقطع A و h ، عمق آب ، دارد. باوجود این ، برای اغلب مسایل با فرض $q = 0.6$ جواب‌های قابل قبولی به‌دست می‌آید.

مثال ۷ — یک تانک استوانه‌ای به ارتفاع ۴ فوت و شعاع قاعده‌ی ۳ فوت پر از آب است. در ساعت ۱۲ ظهر دریچه‌ای دایره شکل به شعاع قاعده‌ی ۰.۵ اینچ را که در پایین تانک قرار دارد باز می‌کنیم تا آب تانک خالی شود. معین کنید چه مدت زمان طول می‌کشد تا:

(الف) — حجم آب در ظرف به نصف مقدار کاهش یابد.

(ب) — تمام آب ظرف خالی شود.

حل — اگر $h(t)$ ارتفاع سطح آب (بر حسب فوت) و $v(t)$ حجم آب در لحظه t (بر حسب ثانیه) باشد، داریم

$$v(t) = 9\pi h(t)$$

بنابراین

$$\frac{dv}{dt} = 9\pi\frac{dh}{dt}$$

حال با توجه به (۱۱)

$$۹\pi \frac{dh}{dt} = -۰.۶\pi \left(\frac{۰.۵}{۱۲}\right)^۲ \sqrt{۶۴h}$$

یا

$$h^{-\frac{۱}{۲}} dh = -\frac{۱}{۱۰۸۰} dt$$

جواب عمومی این معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت زیر است

$$\sqrt{h} = c - \frac{t}{۲۱۶۰}$$

در $t = ۰$ داریم $h = ۴$ ، در نتیجه $c = ۲$. بنابراین

$$t = ۲۱۶۰(۲ - \sqrt{h}) \qquad (۱۲)$$

حال اگر در (۱۲) قرار دهیم $h = ۲$ ، آن‌گاه به‌دست می‌آوریم

$$t = ۲۱۶۰(۲ - \sqrt{۲}) = ۱۲۶۵ \text{ ثانیه } \approx ۲۱ \text{ دقیقه}$$

یعنی، تقریباً پس از ۲۱ دقیقه حجم آب در تانک نصف می‌شود. هم‌چنین اگر در (۱۲) قرار دهیم $h = ۰$ ، آن‌گاه خواهیم داشت

$$t = ۴۳۲۰ \text{ ثانیه } = ۷۲ \text{ دقیقه}$$

یعنی، در ساعت یک و ۱۲ دقیقه‌ی بعد از ظهر تمام آب تانک خالی می‌شود.

مثال ۸ — هواپیمایی با سرعت ثابت v مایل در ساعت از نقطه‌ی A به طرف مقصد خود، نقطه‌ی O ، که در غرب A و به فاصله‌ی a مایل از آن است ، حرکت می‌کند. باد با سرعت w مایل در ساعت از جنوب به سمت شمال می‌وزد. اگر خلبان هواپیما را همواره به سوی مقصد هدایت کند، مسیر حرکت هواپیما را تعیین کنید.

حل — محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۰ انتخاب می‌کنیم، و فرض می‌کنیم صفحه‌ی xy، صفحه‌ی حرکت هواپیما باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

معادلات پارامتری مسیر باشد. در نقطه‌ی $P(x, y)$ ، اگر $\mathbf{u}$ بردار سرعت هواپیما باشد، داریم

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

از تصویر این رابطه‌ی برداری روی محورها، خواهیم داشت

$$u_x = v_x + w_x$$

$$u_y = v_y + w_y$$

می‌دانیم $u_x = \frac{dx}{dt}$ و $u_y = \frac{dy}{dt}$ ، و با توجه به شکل ۱۰ داریم

$$v_x = -v\cos\theta \quad , \quad v_y = -v\sin\theta \quad , \quad w_x = ۰ \quad , \quad w_y = w$$

پس

$$\frac{dx}{dt} = -v\cos\theta = \frac{-vx}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -v\sin\theta + w = \frac{-vy}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} + w$$

بنا به قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-vy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} + w}{\frac{-vx}{\sqrt{x^۲+y^۲}}} = \frac{-vy + w\sqrt{x^۲ + y^۲}}{-vx}$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k\sqrt{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}}$$

که $k = \frac{w}{v}$.

این معادله همگن است، و برای حل آن قرار می‌دهیم $y = vx$. پس از اختصار معادله‌ی جداشدنی زیر نتیجه می‌شود

$$k\frac{dx}{x} + \frac{dv}{\sqrt{۱ + v^۲}} = ۰$$

جواب عمومی این معادله چنین است

$$k\ln|x| + \ln\left(v + \sqrt{۱ + v^۲}\right) = c \qquad (۱۳)$$

برای تعیین c، توجه کنید که وقتی $x = a$، داریم $y = ۰$، که در این‌صورت $v = ۰$. پس $c = k\ln a$. بنابراین، از (۱۳) خواهیم داشت

$$v + \sqrt{۱ + v^۲} = (\frac{x}{a})^{-k}$$

و از این معادله به‌دست می آوریم

$$v - \sqrt{۱ + v^۲} = -(\frac{x}{a})^k$$

حال از جمع دو رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود

$$v = \frac{۱}{۲}\left[(\frac{x}{a})^{-k} - (\frac{x}{a})^k\right]$$

چون $y = vx$، پس مسیر هواپیما چنین است

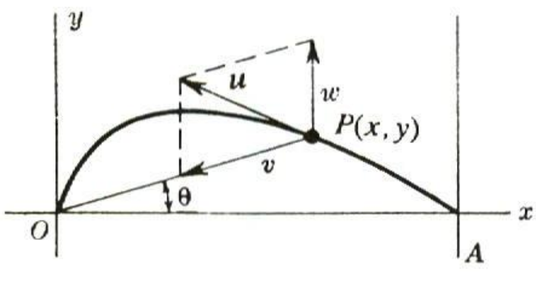
$$y = \frac{a}{۲}\left[(\frac{x}{a})^{۱-k} - (\frac{x}{a})^{۱+k}\right]$$

واضح است که هواپیما به مقصد می‌رسد به‌شرط آن که $۰ < k - ۱$، یعنی $v < w$، و در این‌صورت داریم

$$\lim_{x\to ۰} y(x) = ۰$$

و

$$\lim_{x\to ۰} y'(x) = \infty$$

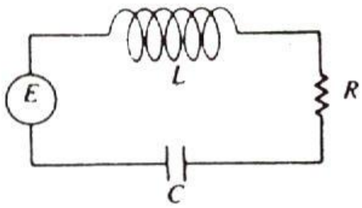


شکل ۱۰

مدارهای الکتریکی

شکل ۱۱ یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که شامل یک مقاومت R (اهم)، یک سیم پیچ با ضریب خود القایی L (هنری)، یک خازن با ظرفیت C (فاراد) و یک مولد با نیروی محرکه‌ی E (ولت) می‌باشد، که این چهار عنصر الکتریکی به‌طور سری بسته

شده‌اند. فرض می‌کنیم R ، L ، C همگی ثابت و مثبت هستند، ولی $E = E(t)$ در حالت کلی تابعی از t ، زمان، است. وقتی کلید بسته می‌شود و به اصطلاح مدار بسته است، مولد جریان الکتریکی را با شدت $I(t)$ آمپر به مدار می‌رساند.



شکل ۱۱

یادآوری می‌کنیم که:

افت ولتاژ در طول مقاومت	$E_R = RI$
افت ولتاژ در طول سیم پیچ	$E_L = L\frac{dI}{dt}$
افت ولتاژ در طول خازن	$E_C = \frac{1}{C}Q$

Q عبارت است از بار در مدار که برحسب کولن اندازه گیری می‌شود. حال در این‌جا قوانین کرشهف را یادآور می‌شویم :

قانون اول — در یک مدار الکتریکی، مجموع شدت جریان‌هایی که به هر گره وارد می‌شوند، برابر است با مجموع شدت جریان هایی که از این گره خارج می‌شوند.
قانون دوم — در یک حلقه‌ی بسته، مجموع افت ولتاژها در طول مقاومت ها، سیم پیچ‌ها و خازن‌ها برابر کل نیروی محرکه است.

بنابراین، بنابر قانون دوم کرشهف ، در مدار بسته‌ی مطابق شکل ۱۱، می‌توان نوشت

$$E_R + E_L + E_C = E$$

پس، معادله‌ی دیفرانسیل زیر نتیجه می‌شود

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \qquad (۱۴)$$

در حالت خاص که مدار شامل خازن نباشد، معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول خطی زیر را داریم

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad (۱۵)$$

که از حل آن، $I = I(t)$ به‌دست می‌آید.

از آن‌جایی که شدت جریان آهنگ تغییر بار الکتریکی است، پس، $I = \frac{dQ}{dt}$. اگر به‌جای I در (۱۴) قرار دهیم، معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خطی زیر را برای تابع $Q(t)$ خواهیم داشت

$$L\frac{d^۲Q}{dt^۲} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{۱}{C}Q = E(t)$$

این معادله را در فصل سوم مورد بررسی قرار خواهیم داد.

مثال ۹ — در مدار $R-L$ شکل ۱۲، ضریب خودالقایی برابر با $L = ۴$ هنری، مقاومت برابر با $R = ۲۰$ اهم و $E = ۱۰۰$ ولت است. اگر در $t = ۰$ داشته باشیم $I = ۰$، پیدا کنید $I(t)$ را برای $t \geq ۰$.

حل — در این مثال، معادله دیفرانسیل (۱۵) چنین است

$$۴\frac{dI}{dt} + ۲۰I = ۱۰۰$$

یا

$$\frac{dI}{dt} + ۵I = ۲۵$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$I(t) = ۵ + ce^{-۵t}$$

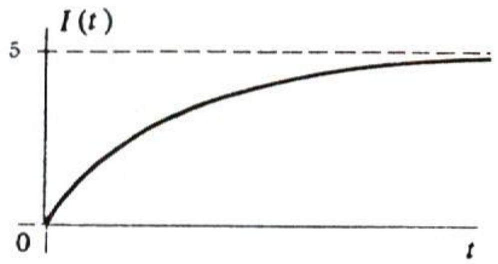
داریم $I(۰) = ۰$، پس $c = -۵$، و

$$I(t) = ۵ - ۵e^{-۵t}$$

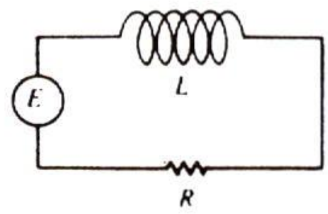
ملاحظه می‌شود که

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = ۵$$

و این شدت جریانِ **حالت پایا** نامیده می‌شود(شکل ۱۳).



شکل ۱۳



شکل ۱۲

مثال ۱۰ — در مثال ۹، با فرض آن که $E(t) = ۲۰ \sin ۵t$ ، $I(t)$ را به‌دست آورید.

حل — داریم

$$\frac{dI}{dt} + ۵I = ۵ \sin ۵t$$

و جواب عمومی این معادله‌ی خطی چنین است

$$I(t) = \frac{۱}{۲}(\sin ۵t - \cos ۵t) + ce^{-۵t}$$

از شرط $I(۰) = ۰$ نتیجه می‌شود $c = \frac{۱}{۲}$. پس

$$I(t) = \frac{۱}{۲}(\sin ۵t - \cos ۵t) + \frac{۱}{۲}e^{-۵t}$$

کاربرد در شیمی

مثال ۱۱ — یک مخزن شامل ۱۰۰ گالن محلول آب نمک است که در این محلول ۱ پوند نمک وجود دارد(شکل ۱۴). در لحظه‌ی $t = ۰$ ، محلول آب نمک دیگری را که در هر گالن آن ۱ پوند نمک حل شده است با سرعت ۳ گالن در دقیقه وارد مخزن می‌کنیم و همزمان با آن، آب نمک داخل مخزن را با همین سرعت خارج می‌نماییم. با فرض آن‌که محلول داخل مخزن به‌طور پیوسته به‌هم زده شود تا غلظت آن یکنواخت باشد، معین کنید:

(الف) — مقدار نمک را در مخزن در هر لحظه‌ی t.

(ب) — زمان لازم برای آن که نمک موجود در مخزن به ۲ پوند برسد.

حل — فرض کنید $x(t)$ (بر حسب پوند) مقدار نمک در مخزن در لحظه‌ی t باشد. بنا به فرض، $x(\circ) = ۱$. سرعت ورود نمک به مخزن برابر است با:

$$۳ \frac{\text{پوند}}{\text{دقیقه}} = ۱ \frac{\text{پوند}}{\text{گالن}} \times ۳ \frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$$

حال سرعت خروج نمک از مخزن را محاسبه می‌کنیم. چون نمک موجود در هر گالن در لحظه‌ی t برابر است با $\frac{x}{۱۰۰}$ ، پس سرعت خروج نمک از مخزن برابر است با

$$\frac{۳x}{۱۰۰} \frac{\text{پوند}}{\text{دقیقه}} = \frac{x}{۱۰۰} \frac{\text{پوند}}{\text{گالن}} \times ۳ \frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$$

پس، آهنگ تغییر نمک در مخزن، $\frac{dx}{dt}$ ، برابر است با

$$\frac{dx}{dt} = \text{آهنگ ورود نمک به مخزن} - \text{آهنگ خروج نمک از مخزن}$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = ۳ - \frac{۳x}{۱۰۰}$$

یا

$$\frac{dx}{dt} + \frac{۳x}{۱۰۰} = ۳ \qquad (۱۶)$$

معادله‌ی (۱۶) همراه با شرط اولیه‌ی $x(\circ) = ۱$ ، مدل ریاضی برای این مسأله است. جواب عمومی معادله‌ی خطی (۱۶) عبارت است از

$$x(t) = ۱۰۰ + ce^{-\circ.\circ۳\, t}$$

از شرط اولیه نتیجه می‌شود، $c = -۹۹$. پس

$$x(t) = ۱۰۰ - ۹۹\, e^{-\circ.\circ۳\, t} \qquad (۱۷)$$

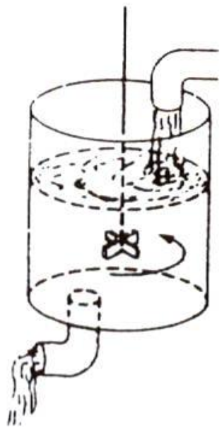
از این معادله مقدار نمک در لحظه‌ی t به‌دست می‌آید. حال در این معادله قرار می‌دهیم $x = ۲$ و t را محاسبه می‌کنیم

$$۲ = ۱۰۰ - ۹۹\, e^{-\circ.\circ۳\, t}$$

و از این جا به‌دست می آوریم

$$t = ۰.۳۳۸ \text{ دقیقه}$$

یعنی، پس از سپری شدن این مدت زمان، نمک موجود در مخزن به ۲ پوند خواهد رسید.



شکل ۱۴

کاربرد در بیولوژی

مثال ۱۲ — فرض کنید تجمعی از باکتری ها با آهنگی متناسب با تعداد باکتری موجود افزایش می یابد. اگر تعداد باکتری ها در ۵ ساعت دو برابر شود، چند ساعت طول خواهد کشید تا تعداد آن ها سه برابر شود؟

حل — فرض کنید $N(t)$ تعداد باکتری ها در لحظه‌ی t باشد. (توجه کنید که اگر $N(t)$ بزرگ باشد، می‌توان آن را تا بعی پیوسته از t و حتی مشتق پذیر فرض نمود.) آن‌گاه، $\frac{dN}{dt}$، آهنگ تغییر تعداد باکتری ها است. بنا به فرض داریم

$$\frac{dN}{dt} = kN \qquad (۱۸)$$

که $k > ۰$ ضریب تناسب است. فرض کنید در آغاز تعداد باکتری ها $N_۰$ باشد، یعنی

$$N(۰) = N_۰ \qquad (۱۹)$$

جواب معادله‌ی (۱۸) با شرط (۱۹) چنین است

$$N(t) = N_۰ e^{kt} \qquad (۲۰)$$

بنا به فرض داریم $N(5) = 2N_0$ ، پس

$$2N_0 = N_0 e^{5k}$$

از این معادله نتیجه می‌شود $k = \frac{1}{5}\ln 2$. این مقدار را در (۲۰) قرار می دهیم، خواهیم داشت

$$N(t) = N_0 e^{(0.2 \ln 2)t}$$

حال t را طوری تعیین می‌کنیم که $N(t) = 3N_0$. پس

$$3N_0 = N_0 e^{(0.2 \ln 2)t}$$

از این معادله خواهیم داشت

$$t = 5\,\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 7.89 \text{ ساعت}$$

یعنی، پس از این مدت تعداد باکتری‌ها سه برابر می‌شود.

کاربرد در اقتصاد

مثال ۱۳ — فرض کنید آهنگ تغییر قیمت P یک کالا در هر لحظه t در بازار متناسب با $D - S$ باشد، که D تقاضا و S عرضه است، یعنی

$$\frac{dP}{dt} = k(D - S) \tag{21}$$

که ثابت $k > 0$ ضریب « **تعدیل** » نامیده می‌شود. در حالت ساده که D و S توابع خطی از P به‌صورت

$$D = a - bP \quad , \quad S = -c + dP$$

که a ، b، c، d ثابت و مثبت اند، باشند، معادله‌ی (۲۱) یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول است. فرض کنید $\bar{P}$ قیمت « **تعادل** » باشد ، یعنی قیمتی که به ازای آن

$$a - b\bar{P} = D = S = -c + d\bar{P}$$

در این صورت می‌توان نشان داد که

$$P(t) = \left[P(\circ) - \bar{P}\right] e^{-k(b+d)t} + \bar{P} \tag{۲۲}$$

که $P(\circ)$ قیمت اولیه‌ی کالا است. ملاحظه کنید که در معادله‌ی (۲۲) وقتی $t \to \infty$، آن‌گاه $P(t) \to \bar{P}$، یعنی قیمت کالا به قیمت تعادل می‌رسد. اثبات فرمول (۲۲) به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌شود.

منحنی کم‌ترین زمان و منحنی هم‌زمان

در این قسمت کاربرد دیگری از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول را در حل یک مسأله‌ی تاریخی نشان می‌دهیم.

مسأله — نقاط A و B در یک صفحه مفروض‌اند از میان همه‌ی منحنی‌های واصل بین دو نقطه‌ی A و B، آن منحنی را پیدا کنید که اگر در طول آن گلوله‌ای به جرم m بدون لغزش و بدون سرعت اولیه رها شود، در کم‌ترین زمان به نقطه‌ی B برسد.

حل — محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۵ انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $B(x_\circ, y_\circ)$ و $y = f(x)$ معادله‌ی منحنی مطلوب باشد. با استفاده از اصل بقای انرژی، وقتی گلوله در نقطه‌ی $P(x, y)$ است، داریم

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mgy$$

و یا

$$v = \sqrt{۲gy}$$

که v سرعت گلوله در نقطه‌ی P است. از طرفی اگر s طول کمان منحنی از A تا P باشد، آن‌گاه $v = \frac{ds}{dt}$. پس

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{۲gy}$$

یا

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{۲gy}} = \frac{\sqrt{۱ + y'^۲}}{\sqrt{۲gy}}dx$$

با انتگرال گیری داریم

$$t = \int_{۰}^{x_۰} \frac{\sqrt{۱ + y'^{۲}}}{\sqrt{۲gy}} ds \tag{۲۳}$$

که نشان دهنده‌ی زمانی است که گلوله از A به B می‌رسد. برای آن که این زمان می‌نیمم باشد، بایستی تابع $y = f(x)$ را چنان تعیین نمود که به‌ازای آن انتگرال (۲۳) می‌نیمم شود. در مبحث حساب تغییرات که شاخه‌ای از ریاضیات است ، ثابت می‌شود تابعی که انتگرال (۲۳) را می‌نیمم می‌کند، جواب معادله‌ی دیفرانیسل زیر است

$$(۱ + y'^{۲})y = c \tag{۲۴}$$

که c یک ثابت مثبت می‌باشد. از معادله‌ی (۲۴) داریم

$$y' = \pm\sqrt{\frac{c - y}{y}} \tag{۲۵}$$

چون با افزایش متغیر x ، متغیر y افزایش می‌یابد، پس $y' > ۰$. بنابراین، از (۲۵) خواهیم داشت

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c - y}}\, dy$$

و یا

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c - y}}\, dy + c_۱ \tag{۲۶}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال در (۲۶)، قرار می‌دهیم

$$y = c\sin^{۲}\alpha \tag{۲۷}$$

و

$$dy = ۲c\sin\alpha\cos\alpha\; d\alpha$$

آن‌گاه پس از اختصار نتیجه می‌شود

$$x = \int ۲c\sin^{۲}\alpha\; d\alpha = c\int (۱ - \cos ۲\alpha) d\alpha + c_۱$$

و یا

$$x = c\left(\alpha - \frac{\sin ۲\alpha}{۲}\right) + c_۱ \tag{۲۸}$$

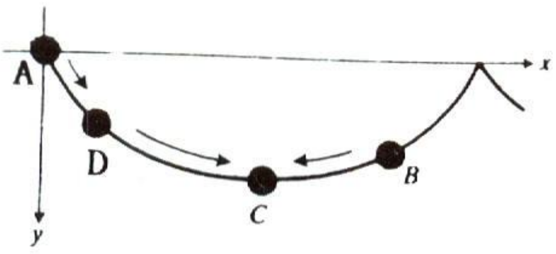
از آن‌جایی که منحنی از نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ می‌گذرد، از (۲۷) و (۲۸) نتیجه می‌شود که $c_1 = \circ$. بنابراین

$$\begin{cases} x = \frac{c}{۲}(۲\alpha - \sin ۲\alpha) \\ y = \frac{c}{۲}(۱ - \cos ۲\alpha) \end{cases}$$

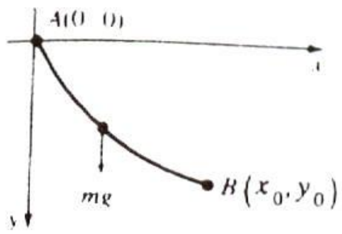
اگر قرار دهیم $۲\alpha = \theta$، معادلات پارامتری منحنی را به‌صورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(۱ - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a = ۲c)$$

که معادلات پارامتری **چرخ نما**(سیکلویید) می‌باشد؛ و a را می‌توان طوری تعیین کرد که چرخ نما از نقطه‌ی مفروض $B(x_\circ, y_\circ)$ بگذرد. پس، در طول چرخ نما، گلوله در کم‌ترین زمان به نقطه‌ی B می‌رسد. از این جهت آن را **منحنی کم‌ترین زمان** می‌نامند. هم‌چنین می‌توان ثابت نمود که اگر چند گلوله ، برای مثال ، از نقاط A ، B و D (شکل ۱۶) به‌طور هم زمان و بدون سرعت اولیه در طول چرخ نما رها شوند، هم زمان به C، پایین ترین نقطه‌ی چرخ نما، می‌رسند. از این رو چرخ نما را **منحنی هم زمان** می‌نامند.



شکل ۱۶



شکل ۱۵

مسأله‌ی منحنی کمترین زمان در سال ۱۶۹۶ توسط **یوهان برنولی** (۱۷۴۸ — ۱۶۶۷) مطرح گردید و از مسایل مشهور تاریخ ریاضیات است. این مسأله توسط خود یوهان و برادرش **ژاکوب** به‌طور مستقل حل شد.

ریاضیدانان آن عصر، **نیوتن**(۱۷۲۷ — ۱۶۴۲) ، **لایبنیز**(۱۷۱۶ — ۱۶۴۶)، **هوپیتال** (۱۷۰۷ — ۱۶۶۱) نیز جواب صحیح مسأله را به‌دست آوردند.

۲.۱۰ معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه‌ی اول

در این بخش دو دسته از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که با یک تعویض متغیر ساده به معادلات مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شوند.

دسته‌ی اول — معادلاتی هستند به شکل

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

یعنی، معادلاتی که در آن ها متغیر وابسته y موجود نیست. در معادله‌ی (۱) قرار می‌دهیم

$$u = y^{(n-1)} \qquad (2)$$

آن‌گاه با مشتق‌گیری از طرفین (۲) نسبت به x داریم $u' = y^{(n)}$. پس، معادله‌ی (۱) با این تعویض متغیر به معادله‌ی مرتبه‌ی اول به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$F(x, u, u') = 0$$

مثال ۱ — جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y''' - \frac{1}{x}y'' = 0 \qquad (3)$$

حل — قرار می‌دهیم $u = y''$ و $u' = y'''$. آن‌گاه معادله‌ی (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 \qquad (4)$$

معادله‌ی (۴) جدا شدنی است ، و جواب عمومی آن عبارت است از

$$u(x) = c_1 x$$

پس

$$y'' = c_1 x$$

با انتگرال گیری نسبت به x به‌دست می‌آوریم

$$y' = \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2$$

مجدداً انتگرال می‌گیریم

$$y = \frac{۱}{٦}c_۱x^۳ + c_۲x + c_۳$$

چون $c_۱$ ثابت دلخواه است، پس جواب عمومی (۳) چنین است

$$y = c_۱x^۳ + c_۲x + c_۳$$

مثال ۲ — معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$xy'' = ۲(y')^۲ - ۲y' \qquad (۵)$$

حل — معادله فاقد y است. قرار می‌دهیم

$$y' = u \quad , \quad y'' = u'$$

آن‌گاه معادله‌ی (۵) به‌صورت زیر در می‌آید

$$x\frac{du}{dx} = ۲(u^۲ - u) \qquad (٦)$$

معادله‌ی (٦) جداشدنی است، و می‌توان نوشت

$$\frac{du}{u(u-۱)} = ۲\frac{dx}{x}$$

یا

$$\left(\frac{۱}{u-۱} - \frac{۱}{u}\right)du = \frac{۲}{x}dx$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\ln\left|\frac{u-۱}{u}\right| = ۲\ln|x| + c'$$

یا

$$\frac{u-۱}{u} = cx^۲ \qquad (c = \pm e^{c'})$$

و از این جا

$$u = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - cx^2} \tag{۷}$$

اگر $c > 0$، قرار می‌دهیم $c = a^2$ و در این صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - a^2x^2} \tag{۸}$$

با انتگرال گیری از (۸) داریم

$$y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1 + ax}{1 - ax} \right| + c_1 \tag{۹}$$

اگر در (۷) $c < 0$ ، قرار می‌دهیم $c = -b^2$. آن‌گاه معادله‌ی (۷) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + b^2x^2} \tag{۱۰}$$

با انتگرال گیری از (۱۰) خواهیم داشت

$$y = \frac{1}{b} \tan^{-1}(bx) + c_2 \tag{۱۱}$$

تذکر - توجه کنید که توابع ثابت $u(x) = 0$ و $u(x) = 1$ جواب‌های (٦) هستند. در نتیجه توابع

$$y(x) = c_3 \quad , \quad y(x) = x + c_4 \tag{۱۲}$$

نیز جواب‌های (۵) می‌باشند.

دسته‌ی دوم — معادلات مرتبه‌ی دومی به شکل زیر هستند:

$$G(y, y', y'') = 0 \tag{۱۳}$$

در این معادلات متغیر مستقل x وجود ندارد. قرار می‌دهیم

$$u = y' \tag{۱۴}$$

آن گاه با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان نوشت

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

پس، معادله‌ی (۱۳) به معادله‌ی مرتبه‌ی اول زیر تبدیل می‌شود

$$G\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right) = 0$$

مثال ۳ — جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$y'' = y'(y' + y) \qquad (15)$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = -1$$

حل — متغیر x در معادله وجود ندارد. قرار می‌دهیم $y' = u$ و $y'' = u\frac{du}{dy}$. آن‌گاه معادله‌ی (۱۵) به‌صورت زیر در می‌آید

$$u\frac{du}{dy} = u(u + y) \qquad (16)$$

یا، با تقسیم طرفین بر u (که در این‌جا $u \neq 0$)، داریم

$$\frac{du}{dy} - u = y \qquad (17)$$

این معادله خطی می‌باشد، و عامل انتگرال ساز آن عبارت است از

$$\mu(x) = e^{\int -dy} = e^{-y}$$

پس، جواب عمومی (۱۷) چنین است

$$u = -y - 1 + c_1 e^y$$

یا

$$y'(x) = -y - 1 + c_1 e^y \qquad (18)$$

حال با استفاده از شرایط اولیه، c_1 را پیدا می‌کنیم. در (۱۸) قرار می‌دهیم $y = 0$ و $y' = -1$. آن‌گاه نتیجه می‌شود $c_1 = 0$. پس

$$y' = -y - 1$$

این معادله نیز خطی است، و جواب عمومی آن

$$y = -1 + ce^{-x}$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $y(0) = 0$ ، نتیجه می‌شود $c = 1$. پس جواب (۱۵) با شرایط داده شده چنین است

$$y = -1 + e^{-x}$$

مثال ۴ — جواب معادله‌ی زیر را به‌دست آورید.

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

حل — این معادله از نوع معادلات دسته‌ی دوم است؛ جواب آن را به طریق دیگری به‌دست می‌آوریم. معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$(yy')' = 0$$

با انتگرال گیری داریم

$$yy' = c_1$$

یا

$$\left(\frac{1}{2}y^2\right)' = c_1$$

مجدداً با انتگرال گیری داریم

$$\frac{1}{2}y^2 = c_1x + c_2$$

یا

$$y^2 = ax + b \qquad (a = 2c_1 \ , \ b = 2c_2)$$

که یک خانواه سهمی دو پارامتری است.

کاربرد ها

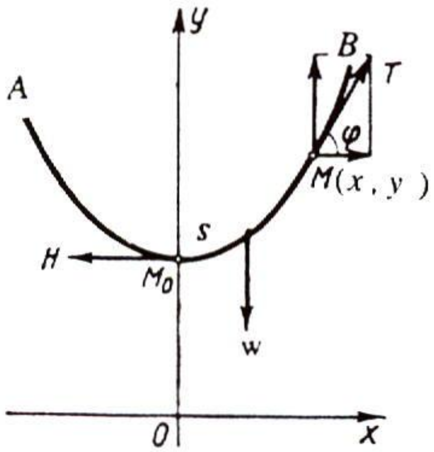
مثال ۵ — یک کابل همگن انعطاف پذیر را بین دو نقطه ی A و B آویزان می‌کنیم. معادله‌ای که شکل کابل را توصیف می‌کند، به‌دست آورید.

حل — فرض کنید $M_{\circ}(a,b)$ پایین ترین نقطه‌ی کابل (شکل ۱۷) و $M(x,y)$ یک نقطه از کابل و $y = f(x)$ معادله‌ی کابل باشد. قطعه‌ی $M_{\circ}M$ از کابل در وضع تعادل تحت اثر سه نیرو است:

(الف) — نیروی وزن $M_{\circ}M$؛ اگر ρ جرم واحد طول کابل و s طول کمان $M_{\circ}M$ باشد، آن‌گاه نیروی وزن برا بر است با $w = \rho s g$، که g شتاب گرانشی است؛

(ب) — کشش T که در جهت مماس در M اثر می‌کند؛

(پ) — کشش H که در جهت مماس در $M_{\circ}$ به‌طور افقی اثر می‌کند.



شکل ۱۷

بنا به قانون نیوتن، در وضع تعادل برآیند نیروها برابر با صفر است. در نتیجه، با توجه به مؤلفه‌ی افقی و قائم نیروها داریم

$$T\cos\phi - H = \circ$$

$$-\rho s g + T\sin\phi = \circ$$

که ϕ زاویه‌ی مماس در M بر منحنی $y = f(x)$ بامحور x ها است. از این دو معادله نتیجه می‌شود

$$\tan\phi = \frac{\rho g}{H} s$$

چون $y' = \tan\phi$ ، پس

$$y' = \frac{\rho g}{H} s \tag{۱۹}$$

با مشتق گیری از (۱۹) نسبت به x داریم

$$y'' = \frac{\rho g}{H} \frac{ds}{dx}$$

از طرفی

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{۱ + y'^۲}$$

پس

$$y'' = \frac{۱}{a}\sqrt{۱ + y'^۲} \tag{۲۰}$$

که $a = \frac{H}{\rho g}$ ثابت است.

معادله (۲۰) از نوع معادلات دسته‌ی اول است. قرار می‌دهیم $y' = u$ و $y'' = u'$. آن‌گاه خواهیم داشت

$$\frac{du}{dx} = \frac{۱}{a}\sqrt{۱ + u^۲} \tag{۲۱}$$

یا

$$\frac{du}{\sqrt{۱ + u^۲}} = \frac{۱}{a} dx$$

با انتگرال گیری داریم

$$\ln\left(u + \sqrt{۱ + u^۲}\right) = \frac{x}{a} + c_۱ \tag{۲۲}$$

با توجه به شکل، چون در نقطه‌ی $M_۰$ مماس افقی است، پس به‌ازای $x = ۰$، داریم $y' = u = ۰$. با استفاده از این شرط، از معادله‌ی (۲۲) نتیجه می‌شود $c_۱ = ۰$. در این صورت از (۲۲) خواهیم داشت

$$u + \sqrt{۱ + u^۲} = e^{\frac{x}{a}} \tag{۲۳}$$

از (۲۳) نتیجه می‌شود $u - \sqrt{۱ + u^۲} = -e^{-\frac{x}{a}}$ ، پس

$$y' = u = \frac{۱}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

و با انتگرال گیری داریم

$$y = \frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + c_۲ \qquad (۲۴)$$

چون نقطه‌ی $(۰, b)$ روی کابل واقع است، پس از (۲۴) نتیجه می‌شود $c_۲ = b - a$.

اگر محورهای مختصات به‌گونه‌ای انتخاب شوند که $b = a = \frac{\rho g}{H}$، آن‌گاه معادله‌ی کابل به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$y = \frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

یا

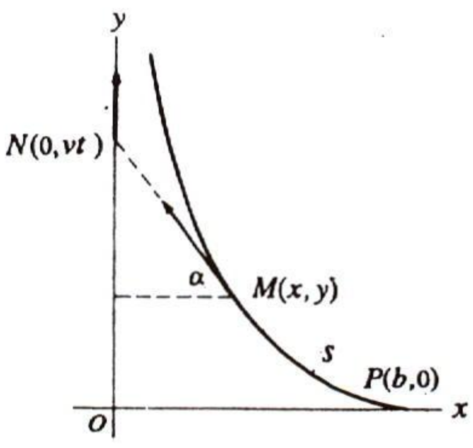
$$y = a \ \cosh(\frac{x}{a})$$

مثال ۶ — خرگوشی در کنار دیوار یک باغ با سرعت ثابت در طول یک خط مستقیم می‌دود. روباهی که به فاصله‌ی b متر از دیوار باغ نشسته است ، خرگوش را هنگامی که نزدیک ترین فاصله را با او دارد، می بیند و در همان لحظه با سرعتی دو برابر سرعت خرگوش به تعقیب او می‌پردازد، و سرانجام خرگوش را می‌گیرد. پیدا کنید:

(الف) — مسیر حرکت روباه را.

(ب) — مسافتی که خرگوش قبل از شکار شدن پیموده است.

(پ) — مدت زمان تعقیب را.



شکل ۱۸

حل — محور y ها را مسیر حرکت خرگوش انتخاب می‌کنیم. فرض کنید هنگامی که خرگوش از نقطه‌ی O، مبدأ مختصات ، عبور می‌کند روباه در نقطه‌ی $P(b, ۰)$ می‌باشد، و از این نقطه

به تعقیب خرگوش می‌پردازد (شکل ۱۸). فرض کنید سرعت خرگوش v باشد. در لحظه‌ی t، روباه در نقطه‌ی $M(x,y)$ و خرگوش در نقطه‌ی $N(0,vt)$ قرار دارند، و خط MN در نقطه‌ی M بر مسیر حرکت روباه مماس است (چرا؟). اگر $y=f(x)$ معادله‌ی مسیر باشد، داریم

$$\text{شیب مسیر در نقطه } M = y' = -\tan\alpha = -\frac{vt-y}{x} = \frac{y-vt}{x}$$

یا

$$xy' = y - vt \qquad (25)$$

از طرفین معادله‌ی (۲۵) نسبت به x مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت

$$xy'' = -v\frac{dt}{dx} \qquad (26)$$

مسافتی که روباه در فاصله‌ی زمانی t پیموده، برابر است با $s = 2vt$، که s طول کمان PM می‌باشد. از طرفی داریم

$$2vt = s = -\int_b^x \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (27)$$

از طرفین (۲۷) نسبت به x مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت

$$2v\frac{dt}{dx} = -\sqrt{1+y'^2} \qquad (28)$$

از (۲۶) و (۲۸) نتیجه می‌شود

$$2xy'' = \sqrt{1+y'^2} \qquad (29)$$

در معادله‌ی (۲۹) y وجود ندارد. قرار می‌دهیم $y'=u$ و $y''=\frac{du}{dx}$. آن‌گاه خواهیم داشت

$$2x\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2} \qquad (30)$$

معادله‌ی (۳۰) جداشدنی است، و جواب آن چنین است

$$u + \sqrt{1+u^2} = cx^{\frac{1}{2}} \qquad (31)$$

در $t=0$ داریم $x=b$، $y=0$ و $u=y'=0$. با استفاده از این شرایط، از معادله‌ی (۳۱)، به‌دست می‌آوریم $c=b^{-\frac{1}{2}}$. بنابراین

$$u + \sqrt{1+u^2} = \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (32)$$

از معادله‌ی (۳۲) نتیجه می‌شود

$$y' = u = \frac{1}{2}\left[(\frac{x}{b})^{\frac{1}{2}} - (\frac{x}{b})^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{۳۳}$$

و با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3b^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}} + c_1 \tag{۳۴}$$

مسیر حرکت روباه از نقطه‌ی $P(b, 0)$ می‌گذرد، بنابراین از معادله‌ی (۳۴) نتیجه می‌شود $c_1 = \frac{2}{3}b$. پس مسیر حرکت روباه چنین است

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3b^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{3}b \tag{۳۵}$$

اگر در معادله‌ی (۳۵) قرار دهیم $x = 0$، آن‌گاه $y = \frac{2}{3}b$ ؛ و این مسافتی است که خرگوش قبل از شکار شدن پیموده است. چون سرعت خرگوش ثابت و برابر v است، پس

$$\frac{2}{3}b = vt$$

و از این‌جا

$$t = \frac{2b}{3v}$$

و این مدت زمان تعقیب می‌باشد.

۱۱.۲ تمرین‌های فصل ۲

معادلات جداشدنی

در تمرین‌های ۱ تا ۱۴ بعضی از معادلات داده شده جداشدنی هستند و بعضی نیستند. آن‌هایی را که جداشدنی هستند، حل کنید.

۱- $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

۲- $y' = y^{\frac{1}{2}}$

۳- $y' + xy = 3$

۴- $y' = x - xy - y + 1$

۵- $(1 + x)ydx + xdy = 0$

۶- $yy' = y^2x^3 + y^2x$

۷- $xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^2$

۸- $3xydx + (x^2 + 4)dy = 0$

۹- $(1 + \ln x)dx + (1 + \ln y)dy = 0$

۱۰- $y^4dx + (x^2 - 3y)dy = 0$

۱۱- $a^2dx = x\sqrt{x^2 - a^2}dy$

۱۲- $(1 + y^2)\cos x\, dx = 2(1 + \sin^2 x)y\, dy$

۱۳- $ye^{x+y}dy = dx$

۱۴- $y' = e^{y-x}\sin x$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه‌ی زیر را تعیین کنید.

۱۵- $\sqrt{1 + x^2}\,\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \quad , \quad y(0) = 0$

۱۶- $(1 - y^2)x\frac{dy}{dx} + (1 + x^2)y = 0 \quad , \quad y(\frac{1}{2}) = 2$

۱۷- $y' = xe^{y-x^2} \quad , \quad y(0) = 0$

۱۸- $(x + 1)y' = x\sqrt{y + 1} \quad , \quad y(0) = 0$

۱۹- $\frac{y'}{y} - x = xy \quad , \quad y(0) = 1$

۲۰- $xy' - y = 1 \quad , \quad y(2) = 3$

۲۱- $y^2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}dy = \sin^{-1}x\, dx \quad , \quad y(0) = 1$

۲۲- $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \quad , \quad y(0) = -2$

معادلات همگن

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲، بعضی از معادلات همگن هستند و بعضی نیستند. برای معادلات همگن، جواب را به‌دست آورید.

۱- $(5x - 2y)y' - y = 2x$

۲- $x\cos(\frac{y}{x})y' = x\sin(\frac{y}{x}) + y\cos(\frac{y}{x})$

۳- $(x^2 + y^2)dy + 2x(x + y)dx = 0$

۴- $y(x^2 - xy + y^2) + xy'(x^2 + xy + y^2) = 0$

۵- $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

۶- $xdy - ydx = \sqrt{xy}\, dx$

۷- $y' = e^{-\frac{y}{x}} + y$

۸- $-x^2 y dx + (x^3 + y^2)dy = 0$

۹- $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\,)\, dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}\,)\, dy = 0$

۱۰- $xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$

۱۱- $\left(x\tan(\frac{y}{x}) + y\right) dx - xdy = 0$

۱۲- $\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - xy\sqrt{x^2 + y^2} dy = 0$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه‌ی زیر را به‌دست آورید.

۱۳- $x(x + y)y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(1) = 0$

۱۴- $y' = -\frac{x+2y}{y} \quad , \quad y(1) = 1$

۱۵- $(2x - 5y)dx + (4x - y)dy = 0 \quad , \quad y(1) = 4$

۱۶- $y' = \sqrt{\frac{x+y}{2x}} \quad , \quad y(1) = 2$

۱۷- $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0 \quad , \quad y(1) = 1$

معادلات کامل

در تمرین‌های زیر، بعضی از معادلات کامل هستند و بعضی نیستند. معادلات کامل را حل کنید.

۱- $(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$

۲- $(3x^2y+y^2)dx=(-x^3+2xy)dy$

۳- $(x-y)dx+(-x+y+2)dy=0$

۴- $(e^x\cos y-x^2)dx+(e^y\sin x+y^2)dy=0$

۵- $(2xy-\tan y)dx+(x^2-x\sec^2 y)dy=0$

۶- $y'=y^{\frac{1}{2}}$

۷- $ye^{xy}dx+(xe^{xy}+1)dy=0$

۸- $\cos y\;dx+\sin x\;dy=0$

۹- $(y+\cos x)dx+(x+\sin y)dy=0$

۱۰- $x(8x^2y-3x)dx+(2x^4+5y)dy=0$

۱۱- $[2x+y\cos(xy)]\,dx+x\cos(xy)dy=0$

۱۲- $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه‌ی زیر را به‌دست آورید.

۱۳- $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0\;,\;\;y(0)=2$

۱۴- $(x-y)dx+(-x+y+2)dy=0\;,\;\;y(1)=1$

۱۵- $(ye^{xy}-2y^3)dx+(xe^{xy}-6xy^2-2y)dy=0\;,\;\;y(0)=2$

۱۶- $(1-xy)^{-2}dx+\left[y^2+x^2(1-xy)^{-2}\right]dy=0\;,\;\;y(4)=1$

۱۷- $\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy=0\;,\;\;y(-1)=2$

۱۸- $(x^2+y^2)dx+2xydy=0\;,\;\;y(1)=-1$

معادلات خطی

در تمرین‌های زیر، بعضی از معادلات خطی‌اند و بعضی نیستند. معادلات خطی را مشخص نموده و جواب عمومی آن‌ها را حل کنید.

۱- $y' + y\cot x = \frac{1}{\sin x}$

۲- $yy' - 7y = 6x$

۳- $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

۴- $(\sin^2 x - y)dx - \tan x\, dy = 0$

۵- $(x^4 + 2y)dx - xdy = 0$

۶- $y' + \frac{1}{\sin x}\, y = y^2$

۷- $2ydx = (x^2 - 1)(dx - dy)$

۸- $\cos x\, \frac{dy}{dx} = 2 + 2y\sin x$

۹- $dx - (1 + 2x\tan y)dy = 0$

۱۰- $y' = y + 3x^2 e^x$

۱۱- $(y - x + xy\cot x)dx + xdy = 0$

۱۲- $y' - \frac{3}{x-1}\, y = (x-1)^4$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه‌ی زیر را تعیین کنید.

۱۳- $(1 + x^2)y' + 2xy = -2x \;,\; y(0) = -1$

۱۴- $(x - 1)y' - 3y = (x-1)^5 \;,\; y(-1) = 16$

۱۵- $(1 - x^2)y' + xy = x \;,\; y(0) = 2$

۱۶- $y^2dx + (3xy - 1)dy = 0 \;,\; y(1) = 1$

۱۷- $\frac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos^2\theta \;,\; r(\frac{\pi}{4}) = 1$

۱۸- $y' - y = b(x) \;,\; y(0) = 1$

که

$$b(x) = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ x & x \geq \circ \end{cases}$$

معادلات برنولی

جواب عمومی معادلات زیر را به‌دست آورید.

۱- $y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$

۲- $x(1 - x^2)y' + (2x^2 - 1)y = x^3y^2$

۳- $\frac{dy}{dx} = y\cot x + \frac{y^2}{\sin x}$

۴- $y' - 2xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$

۵- $y' + \frac{1}{x}y = -2xy^2$

۶- $xy' + \frac{y}{2\ln x} = y^2$

۷- $dy + (4y - 8y^{-3})xdx = 0$

۸- $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2y}$

۹ — جواب معادله‌ی برنولی زیر را با شرایط داده شده پیدا کنید.

$$x(x^2 - 1)y' - y = x^3y^2 \quad , \quad y(2) = -\frac{1}{2}$$

۱۰ — جواب مسأله‌ی زیر را بیابید.

$$\frac{dy}{dt} + y^3 = \frac{y}{a+t} \quad , \quad y(0) = 1$$

۱۱ — جواب مسأله‌ی $y' = xy + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$ را بیابید.

(ج: $y(x) = \frac{\exp(\frac{x^2}{2})}{2 - \int_0^x \exp(\frac{t^2}{2})dt}$)

عامل انتگرال ساز

هریک از معادلات زیر عامل انتگرال سازی دارند که تابعی است تنها از x یا y. برای هریک، عامل انتگرال ساز را تعیین نموده و سپس جواب معادله را بیابید.

۱- $(x^{2}-2y)dx+xdy=0$

۲- $(4x^{2}y^{3}-2y)dx+(3x^{3}y^{2}-x)dy=0$

۳- $(y^{2}+x^{2}+y)dy+xydx=0$

۴- $2x(y-e^{-x^{2}})dx+dy=0$

۵- $(x^{4}+y^{4})dx-xy^{3}dy=0$

۶- $(x^{2}-y^{2}+x)dx+2xydy=0$

۷- $y(x+y+1)dx+x(x+3y+2)dy=0$

۸- $(3y-2xe^{-3x})dx+dy=0$

۹- $y(x+y)dx+(x+2y-1)dy=0$

۱۰- $(y-2x)dx-xdy=0$

۱۱ — تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر یک عامل انتگرال ساز معادله‌ی $ydx-xdy=0$ است ، و سپس با استفاده از هریک از این توابع، معادله را حل کنید.

(الف) $\mu(y)=\frac{1}{y^{2}}\ ,\ y\neq 0$ (ب) $\mu(x,y)=\frac{1}{xy}\ ,\ x\neq 0, y\neq 0$

(پ) $\mu(x,y)=\frac{1}{x^{2}+y^{2}}\ , x\neq 0\ ,\ y\neq 0$ (ت) $\mu(x)=\frac{1}{x^{2}}\ ,\ x\neq 0$

(ث) $\mu(x,y)=\frac{1}{x^{2}-y^{2}}\ , x\neq \pm y$ (ج) $\mu(x,y)=\frac{1}{(x-y)^{2}}\ ,\ x\neq y$

(چ) $\mu(x,y)=\frac{1}{(x+y)^{2}}\ ,\ x\neq -y$

۱۲ — تحقیق کنید تابع $\mu(x,y)=\frac{1}{x^{2}+y^{2}}$ یک عامل انتگرال ساز معادله‌ی

$$(2x^{2}+2y^{2}+x)dx+(x^{2}+y^{2}+y)dy=0$$

است، و به کمک آن جواب معادله را بیابید.

برای هریک از معادلات زیر یک عامل انتگرال ساز که بستگی به هردو متغیر x و y داشته باشد بیابید، و با استفاده از آن معادله را حل کنید. در حل معادلات ، می‌توانید از قضایای زیر استفاده نمایید:

$$d(xy) = ydx + xdy \quad , \quad d(\frac{y}{x}) = \frac{xdy - ydx}{x^۲}$$

$$d\ln(x^۲ + y^۲) = \frac{۲xdx + ۲ydy}{x^۲ + y^۲} \quad , \quad d\left(\tan^{-۱}\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^۲ + y^۲}$$

۱۳- $(x^۲ + y^۲ - x)dx - ydy = ۰$

۱۴- $ydx + (x^۲y^۳ + x)dy = ۰$

۱۵- $ydx + (x + x^۳y^۲)dy = ۰$

۱۶- $y(x^۲ + y^۲ - ۱)dx + x(x^۲ + y^۲ + ۱)dy = ۰$

۱۷- $xdy - ydx = (x^۲ + ۹y^۲)dx$

۱۸- $y(x^۳e^{xy} - y)dx + x(y + x^۳e^{xy})dy = ۰$

۱۹- $\left[x(x^۲ + y^۲)^۲ - y\right]dx + \left[(x^۲ + y^۲)^۲y + x\right]dy = ۰$

۲۰ – نشان دهید اگر عبارت

$$\frac{M_y - N_x}{Ny - Mx}$$

تابعی از z، برای مثال، $g(z)$ باشد که $z = xy$ ، آن‌گاه $\mu(z) = e^{\int g(z)dz}$ یک عامل انتگرال ساز معادله‌ی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$ است. با استفاده از این، برای هریک از معادلات زیر یک عامل انتگرال ساز بیابید، و سپس معادله را حل کنید.

(الف) $ydx + (x + ۳x^۳y^۴)dy = ۰$

(ب) $(۸ydx + ۸xdy) + x^۲y^۳(۴ydx + ۵xdy) = ۰$

(پ) $(y - xy^۲)dx - (x + x^۲y)dy = ۰$

۲۱ – هر یک از معادلات زیر دارای عامل انتگرال سازی به‌صورت $\mu = x^my^n$ است. این

عامل را بیابید، و با استفاده از آن جواب معادله را به‌دست آورید.

(الف) $(3y + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2y)dy = 0$

(ب) $x^3y^3(2ydx + xdy) - (5ydx + 7xdy) = 0$

۲۲ — مانند تمرین ۲۰، شرایطی پیداکنید که معادله‌ی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ دارای عامل انتگرال سازی به‌صورت $\mu(x+y)$ یا $\mu(x^2+y^2)$ یا $\mu(xy)$ یا $\mu(\frac{y}{x})$ باشد.

۲۳ — ثابت کنید اگر $F(x,y)$ تابع همگن و از درجه‌ی k نسبت به x و y باشد، آن‌گاه

$$xF_x + yF_y = kF$$ (قضیه‌ی اویلر)

۲۴ — به کمک تمرین ۲۳ نشان دهید اگر معادله‌ی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ همگن و $Mx + Ny \neq 0$، آن‌گاه $\frac{1}{Mx+Ny}$ یک عامل انتگرال ساز معادله است، و با استفاده از آن معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $xydx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$

(ب) $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$

(پ) $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

۲۵ — معادله‌ی زیر عامل انتگرال سازی به‌صورت $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ دارد. با یافتن این عامل، معادله را حل کنید.

$$(2x^2 + 2y^2 + x)dx + (x^2 + y^2 + y)dy = 0$$

مسیرهای قائم و مایل

۱ — مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های زیر را به‌دست آورید.

(الف) $x^2 + y^2 = 2cx$

(ب) $y = \frac{x}{cx+1}$

(پ) $x^2 - y^2 = 2cx$

۲ — مقدار k را طوری تعیین کنید که سهمی‌های $y = c_۱ x^۲ + k$، مسیرهای قائم بیضی‌های $x^۲ + ۲y^۲ - y = c_۲$ باشند ($c_۱$ و $c_۲$ پارامتر هستند).

۳ — مقدار n را طوری تعیین کنید که منحنی‌های $x^n + y^n = c_۱$، مسیرهای قائم خانواده‌ی $y = \frac{x}{۱ - c_۲ x}$ باشد.

۴ — نشان دهید مسیرهای قائم خانواده‌ی $\frac{x^۲}{a^۲+c} + \frac{y^۲}{b^۲+c} = ۱$ $(a > ۰$ و $b > ۰)$ متعلق به همین خانواده است، که c پارامتر می باشد.

۵ — خانواده منحنی‌هایی را پیدا کنید که با هر یک از منحنی‌های خانواده‌ی $y = \frac{c}{x}$ زاویه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ بسازد.

مسیرهای قائم در مختصات قطبی

٦ — فرض کنید $r = f(\theta)$ معادله‌ی یک منحنی در مختصات قطبی باشد. می‌دانیم ψ، زاویه‌ی مماس بر این منحنی با شعاع حامل، از رابطه‌ی زیر به‌دست می آید

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

فرض کنید $r = f_۱(\theta)$ و $r = f_۲(\theta)$ معادله‌ی دو منحنی در مختصات قطبی باشند، که در نقطه‌ی (r, θ) متقاطع‌اند، و

$$\tan\psi_۱ = \frac{f_۱(\theta)}{f'_۱(\theta)} \quad , \quad \tan\psi_۲ = \frac{f_۲(\theta)}{f'_۲(\theta)}$$

نشان دهید شرط آن که دو منحنی در نقطه‌ی (r, θ) بر هم عمود باشند، آن است که

$$\tan\psi_۱ = -\frac{۱}{\tan\psi_۲}$$

۷ — با استفاده از تمرین ٦، مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های زیر را در مختصات قطبی پیدا کنید.

(الف) $r = c(۱ + \cos\theta)$

(ب) $r = c\sin\theta$

(پ) $r = c\sin ۲\theta$

معادلات ریکاتی

۱ — معادله‌ی مرتبه‌ی اول $y' + P(x)y + Q(x)y^۲ = R(x)$ که در آن P ، Q و R توابعی پیوسته از x هستند، معادله‌ی ریکاتی نامیده می‌شود. نشان دهید اگر $y_۱ = u(x)$ یک جواب معادله‌ی ریکاتی باشد، آن‌گاه معادله دارای جواب‌های دیگری به شکل $y = u(x) + \frac{۱}{v(x)}$ نیز هست، که $v(x)$ در معادله‌ی زیر صدق می‌کند

$$v' - [۲uQ(x) + P(x)]v = Q(x)$$

۲ — با استفاده از تمرین ۱، همه‌ی جواب‌های معادلات ریکاتی زیر را که یک جواب آن‌ها داده شده است، پیدا کنید.

(الف) $y' + (۲x - ۱)y - y^۲ = x^۲ - x + ۱ \quad , \quad y_۱ = x$

(ب) $y' = xy^۲ + (۱ - ۲x)y + x - ۱ \quad , \quad y_۱(x) = ۱$

(پ) $y' = e^{-x}y^۲ + y - e^x \quad , \quad y_۱ = e^x$

(ت) $y' = x^۳(y - x)^۲ + \frac{y}{x} \quad , \quad y_۱ = x$

۳ — معادله‌ی ریکاتی $y' + y + y^۲ = ۲$ دارای جواب‌های ثابت است. این جواب‌ها را پیدا کنید، و سایر جواب‌های هریک را نیز تعیین نمایید.

معادلاتی که به همگن یا جدا شدنی تبدیل می‌شوند

۱ — نشان دهید معادله‌ی دیفرانسیل به‌شکل

$$y' = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$$

که در آن

$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq ۰$$

با تبدیل

$$x = X + h \quad , \quad y = Y + k$$

به یک معادله‌ی همگن تبدیل می‌شود که h و k از دستگاه معادلات زیر به‌دست می آیند

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ Ah + Bk + C = 0 \end{cases}$$

هم‌چنین نشان دهید در حالتی که

$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$

معادله با تعویض متغیر $ax + by = u$ ، به یک معادله‌ی جداشدنی تبدیل می‌شود.

۲ — با استفاده از تمرین ۱، جواب هریک از معادلات زیر را تعیین کنید.

(الف) $y' = \frac{x+2y-4}{2x+y-5}$

(ب) $y' = \frac{-x-2y+1}{3(x+2y)}$

(پ) $(y-2)dx - (x-y-1)dy = 0$

(ت) $(x-4y-9)dx + (4x+y-2)dy = 0$

۳ — جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$y' = \frac{4(3x+y-2)}{3x+y} \quad , \quad y(1) = 0$$

۴ — جواب‌های معادله‌ی $y' = (9x+4y+1)^2$ را به‌دست آورید.

معادلات کلرو

۱ — جواب عمومی و جواب غیرعادی معادلات کلرو زیر را به‌دست آورید.

(الف) $y = xy' - 4(y')^3$

(ب) $y = xy' - e^{y'}$

۲ — یک معادله‌ی کلرو بسازید که جواب غیرعادی آن $y = x - x^3$ باشد.

۳ – یک معادله‌ی کلرو بسازید که جواب غیرعادی آن $y = \sqrt{x^{2} + 1}$ باشد.

۴ – معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(x^{2} - 1)y'^{2} - 2xyy' + y^{2} - 1 = 0$$

(راهنمایی : معادله‌ی درجه‌ی دوم نسبت به y را حل کنید.)

معادلات لاگرانژ

هر معادله‌ی مرتبه‌ی اول به شکل کلی

$$y = x\phi(p) + \psi(p) \qquad (1)$$

که $p = y'$، معادله‌ی لاگرانژ نامیده می‌شود. در حالت خاص که $\phi(p) = p$ ، معادله کلرو است. برای حل معادلات لاگرانژ، مانند معادلات کلرو، از معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم، در این صورت خواهیم داشت

$$p - \phi(p) = [x\phi'(p) + \psi'(p)]\,\frac{dp}{dx} \qquad (2)$$

برای هر مقدار ثابت $p = p_0$ که $p - \phi(p) = 0$، داریم $\frac{dp}{dx} = 0$؛ و به‌ازای این p ، دو طرف معادله‌ی (۲) صفر می‌شوند. جواب متناظر با $p = p_0$، یعنی، $\frac{dy}{dx} = p_0$، یک تابع خطی از x است. برای به‌دست آوردن این تابع، در (۱) قرار می‌دهیم $p = p_0$، آن‌گاه تابع مطلوب به‌صورت زیر نتیجه خواهد شد

$$y = x\phi(p_0) + \psi(p_0) \qquad (3)$$

حال با فرض $p - \phi(p) \neq 0$، معادله‌ی (۲) یک معادله‌ی خطی به‌شکل زیر است

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\phi'(p)}{p - \phi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)} \qquad (4)$$

جواب عمومی معادله‌ی (۴) به‌شکل زیر است

$$x = f(p, c) \qquad (5)$$

بنابراین

$$\begin{cases} x = f(p, c) \\ y = f(p, c)\phi(p) + \psi(p) \end{cases} \qquad (6)$$

جواب عمومی (۱) به‌شکل پارامتری است؛ و از حذف p در معادلات (٦)، جواب عمومی (۱) به‌صورت

$$g(x, y, c) = ۰ \qquad (۷)$$

به‌دست می‌آید. عموماً جواب (۳) را نمی‌توان از (۷) به‌دست آورد، و از این رو (۳) جواب غیرعادی معادله‌ی (۱) است.

تمرین — جواب عمومی و جواب غیرعادی معادله‌ی لاگرانژ $y = x(y')^۲ + (y')^۲$ را به‌دست آورید.

معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه‌ی اول

معادلات زیر را حل کنید.

۱- $y'' = y'$

۲- $۲y'' = e^y$

۳- $y'' = \sqrt{۱ + (y')^۲}$

۴- $y'' = ۱ - (y')^۲$

۵- $(y'')^۲ = \left(۱ + (y')^۲\right)^۳$

٦- $xy'' = y' + ۱$

۷- $yy' = y''\sqrt{y^۲ + (y')^۲} - y'y''$

۸- $yy'' + (y')^۲ - (y')^۳ \ln y = ۰$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه‌ی زیر را به‌دست آورید.

۹- $xy'' + y' + x = ۰ \;,\; y(۰) = y'(۰) = ۰$

۱۰- $yy'' - (y')^۲ = y^۴ \;,\; y(۰) = ۱ \;,\; y'(۰) = ۰$

۱۱- $(y'')^۲ - ۲y'' - ۲xy' + (y')^۲ + x^۲ = ۰ \;,\; y(۰) = \frac{۱}{۲} \;,\; y'(۰) = ۱$

۱۲- $yy'' + (y')^۲ = ۱ \;,\; y(۰) = ۱ \;,\; y'(۰) = ۱$

۱۳- $y''y^۳ = ۱ \;,\; y(\frac{۱}{۲}) = y'(\frac{۱}{۲}) = ۱$

۱۴- $۳y'' = y^{-\frac{۵}{۳}} \;,\; y(۰) = y'(۰) = ۱$

۱۵- $y'' = \frac{y'}{x}\left(۱ + \ln \frac{y'}{x}\right) \;,\; y(۱) = \frac{۱}{۲} \;,\; y'(۱) = ۱$

۱٦- $۲y'' = e^y \;,\; y(۰) = ۰ \;,\; y'(۰) = ۰$

مسایل گوناگون

معادلات زیر را حل کنید.

۱- $(y^{۳}+y+۱)dx+x(x-۳y^{۲}-۱)dy=۰$

۲- $(x^{۵}-y^{۲})dx+۲xydy=۰$

۳- $y^{۳}\sec^{۲}x dx-(۱-۲y^{۲}\tan x)dy=۰$

۴- $xydx+(y^{۴}-۳x^{۲})dy=۰$

۵- $ydx+x(x^{۲}y-۱)dy=۰$

۶- $ydx=x(۱+xy^{۴})dy$

۷- $y'=\tan y\cot x-\sec y\cos x$

۸- $y(x-۱)dx-(x^{۲}-۲x-۲y)dy=۰$

۹- $۴dx+(x-y+۲)^{۲}dy=۰$

۱۰- $(xy-\sin x)dx+x^{۲}dy=۰$

۱۱- $y'=\sin(x+y)$

۱۲- $(x+y^{۲})dx+(۲x+y)dy=۰$

۱۳- $y'=۱+۶xe^{x-y}$

۱۴- $۲ydx+x(x^{۲}\ln y-۱)dy=۰$

۱۵- $(۱+۳x\sin y)dx-x^{۲}\cos y\, dy=۰$

۱۶- $y(x+y)dx+(x+۲y-۱)dy=۰$

۱۷- $y'=(x-y)^{۲}-۲(x-y)-۲$

۱۸- $y'=(\frac{y+۱}{x+۱})^{۲}$

۱۹- $(x - y\ln y + y\ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$

۲۰- $y(2x - y + 1)dx + x(3x - 4y + 3)dy = 0$

جواب مسایل مقدار اولیه‌ی زیر را به دست آورید.

۲۱- $(1 + xy)dx - xdy = 0 \quad , \quad y(1) = 0$

۲۲- $y' = 2(3x + y)^2 - 1 \quad , \quad y(0) = 1$

۲۳- $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 \quad , \quad y(\sqrt{3}) = 1$

۲۴- $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \quad , \quad y(0) = -1$

۲۵- $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0 \quad , \quad y(0) = 2$

۲۶- $y' = \frac{2xye^{(\frac{x}{y})^2}}{y^2+y^2e^{(\frac{x}{y})^2}+2x^2e^{(\frac{x}{y})^2}} \quad , \quad y(0) = 2$

معادلات زیر را با استفاده از تعویض متغیرهای داده شده حل کنید.

۲۷- $\left(2 + 2x^2y^{\frac{1}{2}}\right) ydx + \left(x^2y^{\frac{1}{2}} + 2\right) xdy = 0 \quad ; \quad x^2y^{\frac{1}{2}} = u$

۲۸- $y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0 \quad , \quad xy = u$

۲۹- $(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0 \quad , \quad x^2 = u \quad , \quad y^2 = v$

۳۰- $y' = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2+y^2-x^2} \quad , \quad x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

مسایل نظری

۱ - نشان دهید توابع $y(x) \equiv 0$ و $y(x) = -2\cos x$ هردو جواب‌های معادله‌ی $y' = \sqrt{4 - y^2}$ هستند که در شرط $y(0) = -2$ صدق می‌کنند. آیا این امر قضیه وجود و یکتایی را نقض می‌کند؟

۲ - جواب معادله‌ی $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$ را که

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

به‌دست آورید به‌طوری که جواب آن، $y = y(x)$ ، به‌ازای همه‌ی مقادیر x پیوسته بوده و $y(۰) = ۲$.

۳ – جواب معادله‌ی

$$y' - xy = \begin{cases} x & x \leq ۰ \\ ۰ & x > ۰ \end{cases}$$

را که تابعی است پیوسته از x، به‌دست آورید به‌طوری که $y(۰) = ۱$.

۴ – تمام جواب‌های معادله‌ی $y' \sin x + y \cos x = ۱$ را در بازه‌ی $(۰, \pi)$ به‌دست آورید، و رفتار جواب‌ها را وقتی $x \to ۰^+$ و $x \to \pi^-$ بررسی کنید.

۵ – ثابت کنید تنها یک تابع پیوسته f در بازه‌ی $۰ < x < \infty$ وجود دارد به‌قسمی که

$$f(x) = ۱ + \frac{۱}{x} \int_{۱}^{x} f(t)dt$$

و این تابع را پیدا کنید.

۶ – تمام جواب‌های معادله‌ی $y' + y \cot x = ۲ \cos x$ را در بازه‌ی $(۰, \pi)$ به‌دست آورید. نشان دهید تنها یکی از آن‌ها در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ نیز تعریف شده است.

۷ – فرض کنید تابع $y = f(x)$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل

$$y' = \frac{۲y^۲ + x}{۳y^۲ + ۵}$$

باشد که در شرط $f(۰) = ۰$ صدق می‌کند. اولاً نشان دهید $x = ۰$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع f است. ثانیاً، بدون حل معادله‌ی دیفرانسیل، معین کنید که آیا f در $x = ۰$ دارای یک اکسترمم نسبی هست یا خیر؟

۸ – تمام جواب‌های معادله‌ی مرتبه‌ی اول $xy' + (۱ - x)y = e^{۲x}$ را در بازه‌ی $(۰, \infty)$ به‌دست آورید. نشان دهید وقتی $x \to ۰^+$ ، تنها یکی از جواب‌ها به‌سمت یک حد معین میل

می‌کند.

۹ — فرض کنید $y(x)$ تابعی باشد به‌طوری که $y(۰) = ۰$ و

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{(۱+x^۲)(۱+y^۲)}$$

بدون حل معادله نشان دهید $y(x)$ تابع صعودی از x است، و برای $x > ۰$، $۰ \leq y(x) \leq \frac{\pi}{۲}$.
هم‌چنین نشان دهید عددی مانند L وجود دارد که $\lim_{x\to\infty} y(x) = L$، و L را پیدا کنید.

۱۰ — نشان دهید جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y' = \frac{۱}{۱+x^۲+y^۲} \quad , \quad y(۰) = ۱ \quad , \quad x \geq ۰$$

در نامساوی $۱ \leq y(x) \leq x + ۱$ صدق می‌کند.

۱۱ — فرض کنید تابع $q(x)$ در بازه‌ی $x \geq ۰$ پیوسته و کراندار، و k عدد مثبتی باشد. اولاً نشان دهید هر جواب معادله‌ی $y' + ky = q(x)$ در بازه‌ی $x \geq ۰$ کراندار است. ثانیاً، نشان دهید معادله‌ی $y' - ky = q(x)$ دارای جواب‌هایی است که در بازه‌ی $x \geq ۰$ کراندار نیستند.

۱۲ — تابع حقیقی f با شرایط زیر داده شده است

(الف) $f(۱) = ۱$

(ب) $f'(x) = \frac{۱}{x^۲+[f(x)]^۲} \quad , \quad x \geq ۱$

ثابت کنید $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود، و کوچکتر از $۱ + \frac{\pi}{۴}$ می‌باشد.

۱۳ — نشان دهید مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر جواب ندارد.

$$y' = \sqrt{۱ - y^۲} \quad , \quad y(۰) = ۲$$

۱۴ — همه‌ی جواب‌های مسأله‌ی زیر را به‌دست آورید

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{۲}{۳}} \quad , \quad x(۰) = ۰$$

جواب : $x(t) = \frac{t^3}{27}$, $x(t) \equiv 0$. علاوه براین دو جواب، توابع زیر نیز جواب مسأله هستند:
برای هر $a \geq 0$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{(t-a)^3}{27} & t > a \end{cases}$$

و برای هر $a < 0$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \geq a \\ \frac{(t-a)^3}{27} & t < a \end{cases}$$

۱۵ — جواب‌های معادله‌ی

$$2y'(x) + xy(x) = 2$$

را بیابید، و نشان دهید وقتی $x \to \infty$، تمام جواب‌ها به‌سمت یک حد معین میل می‌کنند و این حد را پیدا کنید.

(جواب ها : $y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt + ce^{-\frac{x^2}{4}}$).

۱۶ — نشان دهید $y = cx^4$ که c ثابت دلخواه است، جواب عمومی معادله‌ی

$$xy' - 4y = 0$$

می‌باشد. نشان دهید تابع پیوسته و مشتق پذیر

$$y = \begin{cases} -x^4 & x < 0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$$

نیز جواب معادله است. این تابع یک جواب خصوصی است یا یک جواب غیرعادی؟

مسایل کاربردی

۱ — منحنی‌هایی را تعیین کنید که اگر در یک نقطه‌ی $M(x,y)$ آن، خط مماس رسم کنیم تا محور x ها را در نقطه‌ی N قطع کند، مساحت مثلث OMN ثابت و برابر a^2 باشد.

۲ — خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه‌ی $P(x,y)$ آن، محور x ها را در T قطع می‌کند. اگر F تصویر P روی محور x ها باشد، معادله منحنی را تعیین کنید به‌طوری که

همواره داشته باشیم، $\overline{TF} = \overline{OF} + \overline{FP}$.

۳ — منحنی‌هایی را تعیین کنید که اگر خط قائم در یک نقطه $M(x,y)$ آن، محور x ها را در N قطع کند، آن‌گاه داشته باشیم $OM = MN$.

۴ — معادله‌ی یک منحنی را به‌دست آورید به‌طوری که زاویه‌ی بین خط مماس و خط قائم در هر نقطه‌ی $M(x,y)$ آن، توسط خط OM نصف شود.

۵ — منحنی‌هایی را در صفحه پیدا کنید که از مبدأ مختصات می‌گذرند، و مجموع طول قائم و تحت قائم آن برابر ۱ باشد.

٦ — جسمی با جرم m از ارتفاعی از حالت سکون به‌طور قائم به طرف زمین رها می‌شود. در صورتی که مقاومت هوا در هر لحظه متناسب با مربع سرعت جسم باشد، سرعت را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

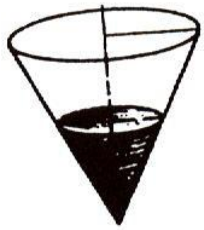
۷ — چتربازی از ارتفاع زیاد سقوط می‌کند. وزن چترباز و چتر رویهم ۱۹۲ پوند است. فرض کنید در t ثانیه‌ی اول سقوط، سرعت چترباز $v(t)\frac{ft}{sec}$ باشد. در ۱۰ ثانیه‌ی اول سقوط، قبل از آن که چتر باز شود، مقاومت هوا $\frac{۳}{۴}v(t)$ پوند می‌باشد. پس از این زمان که چتر باز می‌شود، مقاومت هوا $۱۲v(t)$ می‌شود. با فرض این که شتاب گرانشی، $g = ۳۲\frac{ft}{sec^۲}$ باشد، سرعت چتر باز را به‌صورت تابعی از t پیدا کنید.(در این مسأله $e^{-\frac{۵}{۲}}$ را برابر $\frac{۳۷}{۱۲۸}$ بگیرید.)

۸ — نشان دهید که اگر مایعی حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت دوران کند، سطح مایع به‌شکل یک سهموی دوار خواهد بود.

۹ — فرض کنید یک قطره باران کروی با آهنگی متناسب با سطح آن تبخیر شود. اگر شعاع اولیه‌ی آن ۳ میلی متر و ۱ ساعت بعد به ۲ میلی متر برسد، شعاع قطره‌ی باران را به‌صورت تابعی از t بنویسید.

۱۰ — سرعت تبخیر آب متناسب با مساحت سطحی از آب است که در معرض هوا قرار دارد. ظرفی به شکل قیف با شعاع قاعده ۱ فوت و ارتفاع ۲ فوت در ابتدا پر از آب است. پیدا کنید اولاً، حجم $v(t)$ آب این ظرف را برحسب تابعی از t (زمان). ثانیاً، مدت زمان لازم برای آن

که تمام آب این ظرف تبخیر شود چقدر است؟



۱۱ — تجربه نشان می‌دهد که آهنگ تجزیه‌ی یک عنصر رادیو اکتیو با مقدار موجود از آن عنصر متناسب است. اگر ۱۰۰ میلی گرم از یک عنصر رادیو اکتیو در مدت ۱ هفته به ۸۴.۰۴ میلی گرم کاهش یابد، پیدا کنید فرمولی که جرم عنصر را در هر لحظه به‌دست دهد. هم‌چنین مدت زمانی را که باید سپری شود تا جرم این عنصر به نصف مقدار اولیه کاهش یابد، پیدا کنید. فاصله زمانی که در طول آن جرم عنصر به نصف مقدار اولیه کاهش می‌یابد، **نیمعمر** آن عنصر می‌نامند.

۱۲ — نیمعمر رادیوم تقریباً ۱۶۰۰ سال است. معین کنید چند درصد از یک مقدار معین رادیوم در ۱۰۰ سال تجزیه می‌شود.

۱۳ — ساده‌ترین مدل ریاضی برای رشد جمعیت، مدلی است به‌صورت $\frac{dP}{dt} = kP$ که $P(t)$ جمعیت در لحظه‌ی t است؛ یعنی، آهنگ تغییر جمعیت متناسب با تعداد جمعیت است. در این مدل وقتی $t \to \infty$، آن‌گاه $P(t) \to \infty$. اما چون در جهان متناهی جمعیت نمی‌تواند نامتناهی باشد (برای مثال، به‌دلیل محدود بودن مواد غذایی)، یک مدل ریاضی قابل قبول برای رشد جمعیت، مدلی است به‌شکل

$$\frac{dP}{dt} = kP(a-P)$$

که در آن a حد اکثر اندازه‌ی جمعیت است. در این مدل، $P(t)$ را بر حسب تابعی از t به‌دست آورید، با فرض آن که جمعیت اولیه، $P(0) = P_0$ در دست باشد. نشان دهید $\lim_{t\to\infty} P(t) = a$.

۱۴ — اگر جمعیت یک کشور در ۵۰ سال ۲ برابر شود، معین کنید در طول چند سال جمعیت این کشور ۳ برابر خواهد شد، با فرض آن که رشد جمعیت متناسب با تعداد جمعیت باشد.

۱۵ — ظرفی شامل ۱۰۰ لیتر محلول آب نمک است که ۱۰ کیلو گرم آن نمک می‌باشد. آب خالص با سرعت ۳ لیتر در دقیقه وارد این ظرف می‌شود، و در حالی که محلول به‌طور

پیوسته به‌هم زده می‌شود، باسرعت ۲ لیتر در دقیقه از ظرف خارج می‌گردد. معین کنید در پایان یک ساعت، چه مقدار نمک در ظرف وجود دارد؟

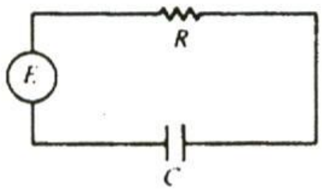
۱۶ — تانکی شامل ۲۵ گالن آب است. الکل با آهنگ ۲ گالن در دقیقه وارد تانک می‌شود، و هم زمان با آن محلول با سرعت ۱ گالن در دقیقه از تانک خارج می‌گردد. غلظت الکل را هنگامی که در تانک ۵۰ گالن از محلول وجود دارد، محاسبه کنید.

۱۷ — یک فنجان قهوه با دمای $۲۰۰°F$ را در اتاقی با دمای $۷۰°F$ قرار می‌دهیم تا سرد شود. پس از ۱۰ دقیقه دمای قهوه به $۱۰۰°F$ می‌رسد. در چه زمانی دمای آن $۱۲۰°F$ بوده است؟

۱۸ — یک گلوله مسی را تا $۱۰۰°C$ حرارت می‌دهیم، و بلافاصله آن را در ظرف آبی که دمای آن $۳۰°C$ است قرار می‌دهیم. پس از ۳ دقیقه دمای گلوله به $۷۰°C$ می‌رسد. معین کنید پس از چه مدت دمای گلوله به $۳۱°C$ خواهد رسید؟

۱۹ — مخزن آبی به‌شکل نیم کره به شعاع R در ابتدا پر از آب است. در پایین مخزن دریچه‌ای به‌شکل یک دیسک به شعاع r را که برای خروج آب ایجاد شده است، باز می‌کنیم. عمق آب را در هر لحظه t به‌دست آورید. هم‌چنین مدت زمانی را که طول خواهد کشید تا مخزن کاملاً از آب خالی شود، محاسبه کنید.(در مدل مسأله $q = ۱$ بگیرید.)

۲۰ — در مدار $R - C$ مطابق شکل، با فرض آن که $E(t) = E_۰$ ثابت باشد، شدت جریان، $I(t)$، را به‌صورت تابعی از t پیدا کنید.



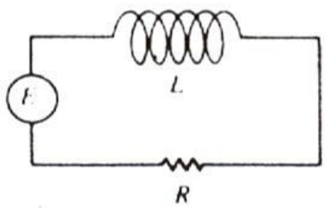
۲۱ — فرض کنید در مدار $R - C$ تمرین ۲۰، $E(t) \equiv ۰$ و $Q(۰) = Q_۰$. اولاً نشان دهید $Q(t)$ در معادله‌ی دیفرانسیل $R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = ۰$ صدق می‌کند. هم‌چنین مدت زمانی را که خازن ۹۹ % از بار اولیه‌ی خود را از دست می‌دهد، محاسبه کنید.

۲۲ — در تمرین ۲۱، فرض کنید $R = ۲۰$ اهم ، $C = ۰.۰۱$ فاراد و $E(t) = ۶۰e^{-۲t}$ ولت. با فرض آن‌که $Q(۰) = ۰$، نمودار $Q(t)$ را رسم کنید، و زمان هایی را که $Q(t)$

ماکزیمم و می‌نیمم است، محاسبه کنید.

۲۳ — در مدار $R-L$ مطابق شکل، $I(t)$ را به‌دست آورید، با فرض آن‌که ۱ $R =$ اهم، ۱ $L =$ هنری، $I(\circ) = \circ$ و $E(t)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد.

$$E(t) = \begin{cases} ۱۲۰ & \circ \leq t < ۱۰ \\ \circ & t \geq ۱۰ \end{cases}$$



۲۴ — در یک رودخانه قایق A از نقطه‌ی O ، مبداء مختصات، در جهت مثبت محور y ها با سرعت ثابت a شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه قایق دیگر B از نقطه‌ی $(d, \circ)$ واقع بر محور x ها با سرعت ثابت b به تعقیب قایق A می‌رود. مسیر قایق B را تعیین کنید. با چه شرطی قایق B به قایق A می‌رسد؟ در چه نقطه‌ای و پس از چه مدت ؟

۲۵ — کشتی S در طول یک خط مستقیم (محور x ها) حرکت می‌کند. کشتی دیگر D به تعقیب کشتی S حرکت می‌کند به‌طوری که همواره فاصله‌ی آن تا کشتی S، a مایل دریایی است. با فرض آن که در لحظه‌ی $t = \circ$، کشتی S در مبداء مختصات و کشتی D در نقطه‌ی $(\circ, a)$ باشد، مسیر کشتی D را به‌دست آورید.

۲۶ — جسمی به‌جرم m تحت اثر نیروی $f(t) = e^{-t}$ در روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند. اگر نیروی مقاومت هوا متناسب با سرعت جسم باشد، سرعت جسم را به‌صورت تابعی از t (زمان) به‌دست آورید، با فرض آن که جسم از حال سکون شروع به حرکت نموده باشد.

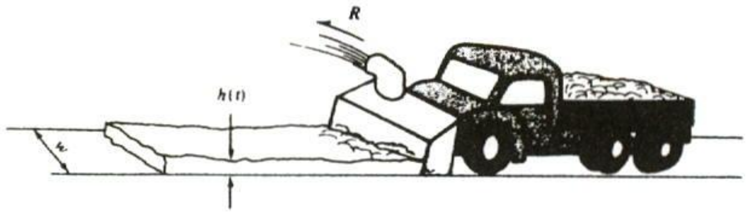
۲۷ — جسمی از ارتفاعی سقوط می‌کند، و مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت جسم، $v(t)$، است. اولاً نشان دهید

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

که g شتاب گرانشی و mk ضریب مقاومت هوا است. این سرعت، **سرعت حدی** یا سرعت سقوط آزاد نامیده می‌شود.

ثانیاً، فرض کنید سرعت حدی انسان ۵۰ $\frac{m}{sec}$ باشد. چتربازی از ارتفاع ۲۰۰۰ متری سقوط می‌کند و چتر باید در ارتفاع ۵۰۰ متری از زمین باز شود. معین کنید چترباز در چه زمانی باید چتر را باز کند، با فرض آن که سرعت اولیه‌ی چترباز صفر باشد. ($g = 9.8 \frac{m}{sec^2}$)

۲۸ — در یک صبح زمستان برف سنگینی با آهنگ ثابت شروع به باریدن نمود. در ظهر، ساعت ۱۲، در حالی که بارش برف ادامه داشت، یک ماشین برف روبی شروع به پاک کردن جاده‌ای نمود. در یک ساعت اول، ۲ مایل و در ساعت دوم ۱ مایل از جاده را پاک نمود. با فرض آن که ماشین برف روبی با سرعت ثابت جاده را برف روبی کند، تعیین کنید در چه ساعتی برف شروع به باریدن نموده است.



۲۹ — جسمی به جرم m را با سرعت اولیه‌ی v_0 به‌طور عمودی به‌طرف بالا پرتاب می کنیم. اگر مقاومت هوا در هر لحظه متناسب با سرعت جسم در آن لحظه باشد، معین کنید مدت زمانی را که گلوله به نقطه‌ی اوج خود می‌رسد.

۳۰ — در مدار $L - C$ مطابق شکل، با فرض آن که $I(0) = 0$ و $Q(0) = Q_0$ ، پیدا کنید $Q(t)$ و $I(t)$ را برای $t > 0$.

(جواب : $Q(t) = Q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$ و $I(t) = \frac{dQ}{dt}$).