معادلات دیفرانسیل معمولی

تالیف: **مهدی نجفی‌خواه**

دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران

بهار ۱۳۹۱

تقدیم به پدرم، مرحوم **غلامرضا نجفی‌خواه** (۱۳۹۱-۱۳۲۴)، روحش شاد.

دیباچه

«قوانین طبیعت نمی‌توانند خطی باشند.»

آلبرت انیشتن

« با اینکه انسانهای مختلف تصوری بخصوص از طبیعت دارند، طبیعت همچنان هزار بار غنی تر است، . . . در هر یک از تئوری های فیزیک یک معادله (دیفرانسیل معمولی و یا مشتقات جزئی) مطرح می‌گردد، و به جنبه‌ای جدید از آنها اشنا می‌شویم ... بدون این نظریه‌ها، چیزی در مورد معادلات دیفرانسیل نمی‌دانستیم. »

هانری پوانکاره

معادله دیفرانسیل نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل است که مجهول آن یک تابع است و این تابع با استفاده از روابط بین مشتقاتش معرفی شده است، نظیر $y'' = xy' - y$ که در آن تابع $y = y(x)$ مجهول می‌باشد.

ایزاک نیوتن برای اول بار موفق شد تا ضابطه حرکت اجرام مکانیکی در خلاء را با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان نماید. از آن زمان تا کنون، روز به روز بر اهمیت معادلات دیفرانسیل افزوده می‌شود. چرا که عملا بسیاری از پدیده‌های علمی (فیزیکی، شیمیایی، جامعه شناسی و ...) را که اصل قطعیت پیروی می‌کنند را با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌توان بیان نمود. بر اساس این اصل، اگر پدیده‌ای را بشناسیم، و اگر نیروها و عوامل موثر در آن را نیز بدانیم، قادیرم تا آینده آن پدیده را (حد اقل در بازه‌ای کوتاه از زمان) پیشبینی کنیم. بر این اساس معادلات دیفرانسیل در بسیاری از زمینه‌های علوم بطور طبیعی ظاهر می‌گردد. از حرکت یک سیستم مکانیکی ساده نظیر یک پاندول گرفته، تا تحلیل حرکت اجسام سماوی، تحلیل جمعیت یک نوع بخصوص از حیوانات، پیشبینی رشد اقتصادی کشور و بسیاری دیگر از مسایل از این دست.

در این کتاب نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل، که در آن تابع مجهول یک متغیره است را مطالعه می‌کنیم. به این گونه معادلات اصطلاحا «معادله دیفرانسیل معمولی» گفته می‌شود. برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی روشهای متعددی وجود دارد. اغلب روشهای معرفی شده در این کتاب، روشهایی هستند که مقدار دقیق جواب را بدست می‌دهند. روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی، خود موضوع کتابی جداگانه است.

ریاضیدانان بسیاری همینک مشغول مطالعه و گسترش روشهای حل این گونه معادلات هستند. این موضوع به اندازه‌ای جذاب و غنی است که هر روزه کارهای جدید بسیاری در این ارتباط به چاپ می‌رسد. کافی است سری به سایت جالب http://eqworld.ipmnet.ru/ بزنید. این سایت نمونه‌ای از بیشمار سایتهای اینچنین است که منحصرا به این موضوع اختصاص دارند.

این کتاب جهت تدریس درس معادلات دیفرانسیل معمولی، برای دانشجویان فنی و مهندسی تهیه شده است و به مرور بر محتویات آن افزوده شده است. این کتاب از پنج فصل کلی تشکیل می‌گردد. با رشد

سریع تکنولوژی و علوم مختلف و فراگیر شده کاربردهای معادلات دیفرانسیل معمولی، طبیعی است که نرم افزارهای ریاضی متعددی برای کمک به حل و تحلیل این گونه معادلات طراحی و ساخته شده است. از جمله ،Mathematica، Maple، Matlab Reduce و ... موالف از بین این نرم افزارها، Maple برگزیده است، چرا که آموزش ان بسیار ساده است و کمک موجود در محیط نرم افزار نیز بسیار کامل می‌باشد. بر این اساس مولف سعی نموده است که در هر کجا که امکان داشته است، استفاده از این نرم افزار در حل مسایل مورد نظر را آموزش دهد. مثالهای بیشتر در این خصوص و حل برخی از مسایل و مطالب بیشتر در این زمینه در سایت این کتاب می‌توانید بیابید:
http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/ODE.htm
موجب امتنان مولف است، که خواننده محترم هر گونه انتقاد و یا پیشنهای در خصوص کتاب حاضر را با ایشان در میان بگذارد. این کار می‌تواند از طریق پست الکترونیک m_nadjafikhah@iust.ac.ir صورت بپذیرد.

مهدی نجفی‌خواه،
تهران، بهار ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۷
۲.۱ روش خطوط همشیب ۱۱
۳.۱ روش تقریبات متوالی - روش پیکارد ۱۴
۴.۱ معادلات تفکیک پذیر ۱۷
۵.۱ معادلات همگن ۲۰
۶.۱ معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ ۲۳
۷.۱ معادلاتی که با تغییر تابع $y = z^\alpha$ به معادله‌ای همگن تبدیل می‌شوند ۲۷
۸.۱ معادلهٔ خطی مرتبه اول ۲۹
۹.۱ معادلهٔ برنولی ۳۱
۱۰.۱ معادلهٔ ریکاتی ۳۳
۱۱.۱ معادلهٔ دیفرانسیل کامل ۳۶
۱۲.۱ فاکتور انتگرال ۳۹
۱۳.۱ معادلاتی که بر حسب y' حل نشده‌اند. ۴۵
۱۴.۱ معادلات به شکل $f(y,y') = 0$ یا $f(x,y') = 0$ ۴۷
۱۵.۱ معادلهٔ لاگرانژ و کلرو ۵۱
۱۶.۱ ساختن معادله دیفرانسیل با داشتن خانواده‌ای از جوابهای آن ۵۴
۱۷.۱ مسیرهای متعامد و همزاویه ۵۵
۱۸.۱ جوابهای تکین یک معادله دیفرانسیل ۵۸
۱۹.۱ استفاده از میپل در بررسی معادلات دیفرانسیل معمولی ۶۲

فصل ۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا

۱.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه ۶۹
۲.۲ کاهش مرتبه معادلات مرتبه بالا ۷۱
۳.۲ معادلات خطی مرتبه بالا ۸۰
۴.۲ رونسکی و گرامی ۸۲
۵.۲ معادله خطی همگن با ضرایب ثابت ۸۶
۶.۲ یافتن معادله خطی همگنی که مجموعه جوابش مفروض است ۹۱
۷.۲ روش ضرایب نامشخص برای یافتن جواب خصوصی ۹۳
۸.۲ روش عملگرهای معکوس برای یافتن جواب خصوصی ۱۰۳

۹.۲ معادلات اولر ۱۱۵
۱۰.۲ روش تغییر پارامتر برای یافتن جواب خصوصی ۱۱۸

فصل ۳ تبدیلات لاپلاس

۱.۳ معرفی تبدیلات لاپلاس ۱۲۵
۲.۳ مشتق و تبدیل لاپلاس ۱۳۰
۳.۳ انتگرال و تبدیل لاپلاس ۱۳۴
۴.۳ تغییر مقیاس و انتقال در لاپلاس ۱۳۸
۵.۳ تابع پله‌ای واحد و توابع پیوسته تکه‌ای ۱۳۹
۶.۳ لاپلاس توابع متناوب ۱۴۵
۷.۳ تابع ضربه و کانولوشن ۱۴۸
۸.۳ عملگر معکوس لاپلاس ۱۵۱
۹.۳ تابع گاما، بسل و لژاندر ۱۶۵

فصل ۴ حل معادلات دیفرانسیل به کمک سریها

۱.۴ سری توان ۱۶۹
۲.۴ سری فروبینیوس ۱۷۹
۳.۴ توابع بسل ۱۹۱
۴.۴ چند جمله‌ایهای لژاندر ۱۹۵

فصل ۵ دستگاه معادلات دیفرانسیل

۱.۵ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱۹۹
۲.۵ تبدیل دستگاه به یک معادله و حل آن ۲۰۵
۳.۵ روش ترکیبات انتگرال پذیر در حل دستگاه معادلات ۲۰۸
۴.۵ دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت ۲۱۲
۵.۵ روش تغییر پارامتر در حل دستگاه خطی غیر همگن ۲۲۰
۶.۵ استفاده از روش لاپلاس ۲۲۵

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

بخش ۱.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

بطور کلی، معادله دیفرانسیل رابطه‌ای بین یک تابع و مشتقات آن است. به بیان دقیق‌تر، [۱]

۱.۱.۱. تعریف یک **معادله دیفرانسیل** یا **معادله دیفرانسیلی**، رابطه‌ای است به شکل

$$\mathscr{E}: F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0,$$

که در آن F تابعی $n+2$ متغیره و y تابعی مجهول است: $y = y(x)$. معادلهٔ $\mathscr{E}$ را از **مرتبهٔ n ام** گوییم هر گاه $y^{(n)}$ صراحتاً در F حضور داشته باشد و n بزرگترین عدد با این خاصیت باشد.

۲.۱.۱. مثال ۱) $\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول است.
۲) $y'' + y + x = \cos x$ یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است.
۳) $(x^2 - y^2)\,dx + (x+y)\,dy = 0$ یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول است.
۴) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - t\dfrac{dy}{dt} = y + t$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بر حسب $y(t)$ است.

۳.۱.۱. تعریف فرض کنیم I یک بازه از خط حقیقی است $I := (a; b)$. البته ممکن است a و b بینهایت باشد.
در صورتی تابع $y = f(x)$ را یک **جواب (خصوصی)** معادلهٔ $\mathscr{E}$ بر I گوییم که

$$\forall x \in I \quad : \quad F\left(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)\right) = 0.$$

یعنی اصطلاحاً f در $\mathscr{E}$ صدق کند.
مجموعهٔ همهٔ جواب‌های $\mathscr{E}$ بر I را **جواب (عمومی)** $\mathscr{E}$ بر I نامیده و با نماد $\mathscr{S}$ نشان می‌دهیم.

[۱] —— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —— تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa1.pdf

۴.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y'' + y = 0$ و $I = \mathbb{R}$. در این صورت $\sin x$، $\cos x$ و $2\sin x - \cos x$ جوابهای خصوصی $\mathscr{E}$ بر I هستند. جواب عمومی $\mathscr{E}$ بر I عبارت است از

$$\mathscr{S} = \left\{ A\sin x + B\cos x \,:\, A, B \in \mathbb{R},\, x \in I \right\};$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند. اغلب به اختصار می‌نویسیم: $\mathscr{S} : y = A\sin x + B\cos x$.

۵.۱.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y' = y/x + \sqrt{xy}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $I = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. در این صورت $y = 0$ و تابع ضمنی y صادق در $x = y\ln^2 y$ جواب خصوصی $\mathscr{E}$ بر I هستند. جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{ y \,:\, x = Ay\ln^2 y,\, A \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+ \right\} \cup \left\{ y = 0 \right\}.$$

۶.۱.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y^2 + y'^2 = 0$ را در نظر بگیرید. تنها جواب این معادله $y = 0$ است.

۷.۱.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y'^2 + 1 = 0$ فاقد هر گونه جوابی است!

۸.۱.۱. تعریف فرض کنید $\mathscr{E}$ معادله‌ای دیفرانسیلی و I بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ است و $x_0 \in I$. مسألهٔ یافتن جوابی از $\mathscr{E}$ که بر I تعریف شود و $y(x_0) = y_0$ را اصطلاحاً مسألهٔ مقدار اولیه یا مسألهٔ کوشی می‌نامند.
جواب مسأله را، جواب $\mathscr{E}$ آغازی از x_0 یا (x_0, y_0) می‌نامند. نمودار جواب را خم یا منحنی انتگرال $\mathscr{E}$ آغازی از (x_0, y_0) می‌نامیم.

۹.۱.۱. قضیه (وجود یکتایی جواب مسألهٔ کوشی) *فرض کنید $f(x,y)$ تابعی است که در دامنهٔ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ از $xy-$ صفحه تعریف می‌شود و $(x_0, y_0) \in D$. فرض کنیم:*

الف) f بر D پیوسته باشد؛

ب) مشتق جزئی $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در D کراندار باشد، و

در این صورت $\varepsilon > 0$ ای و تابعی $y = h(x)$ بر $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ چنان وجود دارد که $h(x_0) = y_0$ و به ازای هر $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ای $h'(x) = f(x, h(x))$. بعلاوه h با این ویژگی منحصر بفرد است.

۱۰.۱.۱. یادداشت شرایط قضیهٔ ۹.۱.۱ لازم نیستند، بلکه تنها شرایط کافی‌اند. یعنی ممکن است یکی و یا هر دوی آنها برقرار نباشند، ولی جواب منحصر بفرد وجود داشته باشد. مثلاً اگر $\mathscr{E} : y' = 1/y^2$ و $(x_0, y_0) = (1, 0)$ و $D : 0 < y$ در این صورت $f(x,y) = 1/y^2$ و $\partial f/\partial y = -2/y^3$ که هیچ یک در (x_0, y_0) حتی تعریف نمی‌شوند. یعنی شرایط الف و ب از ۹.۱.۱ برقرار نیستند. در حالی که $y = \sqrt[3]{3(x-1)}$ تنها جواب $\mathscr{E}$ است و در شرایط $y(1) = 0$ نیز صدق می‌کند. یعنی، جواب یکتا است.

۱۱.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y' = xy + e^{-y}$. در این صورت، هر دو تابع

$$f = xy + e^{-y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y},$$

بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته‌اند. پس اگر دامنهٔ D کراندار باشد، آنگاه بنا به ۹.۱.۱ معادلهٔ $\mathscr{E}$ به‌ازای هر $(x_0, y_0) \in D$ ای دارای یک جواب منحصر بفرد آغازی از (x_0, y_0) است. توجه شود که اگر $D = \mathbb{R}^2$، آنگاه $\partial f/\partial y$ کراندار نیست، اما همچنان جواب منحصر بفرد وجود دارد.

۱۲.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E}: y' = \sqrt{1+y^2}$. در این صورت $f = \sqrt{1+y^2}$ و لذا $\partial f/\partial y = y\sqrt{1+y^2}$. اگر $D = \mathbb{R}^2$، آنگاه f بر D پیوسته است و بعلاوه:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to\infty}\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{\pm 1}{\sqrt{1/y^2+1}}\\ &= \pm 1.\end{aligned}$$

پس $\partial f/\partial y$ بر D کراندار است و بنابراین، معادلهٔ $\mathscr{E}$ بر کل $\mathbb{R}^2$ جواب منحصر بفرد دارد.

۱۳.۱.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\partial f/\partial y = 1/\sqrt[3]{y}$ که وقتی $y \to 0$ به بینهایت میل می‌کند. یعنی $\partial f/\partial y$ کراندار نیست جواب $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{y = \frac{1}{8}(x+c)^3 \,:\, c\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{y=0\right\}.$$

ملاحظه می‌گردد که اگر $(x_0,y_0)=(x_0,0)$، آنگاه $y=\frac{1}{8}(x-x_0)^3$ و $y=0$ در جواب $\mathscr{E}$ یا آغاز از $(x,0)$ هستند. یعنی جواب منحصر بفرد نیست.

۱۴.۱.۱. تعریف فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ و $D\subseteq D_f$. در صورتی می‌گوییم f نسبت به y بر D در شرط لیپشیتز صدق می‌کند که عددی مانند λ با $0<\lambda<1$ یافت گردد که به‌ازای هر $(x,y),(x,z)\in D$ داشته باشیم:

$$|f(x,y)-f(x,z)| < \lambda|y-z|.$$

۱۵.۱.۱. یادداشت اینکه f نسبت به y بر D در شرط لیپشیتز صدق می‌کند از کرانداری $\partial f/\partial y$ بر D نتیجه می‌گردد، ولی عکس آن در حالت کلی ممکن است غلط باشد. نظیر تابع $f=|y|\cos x$ و $D: x^2+y^2\le 1$. در این حالت $\partial f/\partial y$ کراندار نیست، در حالی که f بر D با $\lambda=2$ نسبت به y در شرط لیپشیتز صدق می‌کند.

۱۶.۱.۱. قضیه *اگر تابع f بر D پیوسته و نسبت به y در شرط لیپشیتز صدق کند، آنگاه مسألهٔ مقدار اولیهٔ زیر دارای جواب منحصر بفرد است:*

$$\mathscr{E}: y' = f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0,\qquad (x_0,y_0)\in D.$$

۱۷.۱.۱. یادداشت صدق f در شرط لیپشیتز نسبت به y بر D برای برقراری قضیهٔ ۱۶.۱.۱ الزامی است. مثلاً اگر $\mathscr{E}: y' = f(x,y)$ که

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ اگر}\\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ اگر}\end{cases}$$

و $D: x^2+y^2\le 1$ و $(x_0,y_0)=(0,0)$. در این صورت f بر D نسبت به y در شرط لیپشیتز صدق نمی‌کند. از طرفی $\mathscr{E}$ در $(0,0)$ بینهایت جواب دارد:

$$y = c-\sqrt{x^4+c^2},\qquad c\in\mathbb{R}.$$

۱۸.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y' = \sqrt{1-y^2}$. در این صورت $f = \sqrt{1-y^2}$ و ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned} |f(x.y)-f(x,z)| &= \left|\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1-z^2}\right| \\ &= \frac{|z^2-y^2|}{\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{|y+z|}{\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}}|y-z| \\ &\leq \frac{|y|+|z|}{\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}}|y-z|. \end{aligned}$$

چنانچه فرض شود $u = \max\{|y|,|z|\}$، آنگاه

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x,z)| &\leq \frac{u+u}{\sqrt{1-u^2}+\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

حال اگر $D = \left\{(x,y) : -1 < y < 1\right\}$ و $(x_0,y_0) \in D$ با فرض $\varepsilon = |y_0|/2$ و
$U = \left\{(x,y) : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < (1-\varepsilon)^2\right\}.$

ملاحظه می‌گردد که به ازای هر (x,y) و هر (x,z) در U داریم:

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x,z)| &< \frac{|y_0|+1-\varepsilon}{\sqrt{1-(y_0-1+\varepsilon)}}|y-z| \\ &< \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}|y_0|}}|y-z|. \end{aligned}$$

پس f بر U نسبت به y در شرط لیپشیتز صدق می‌کند و بنابراین $\mathscr{E}$ بر U دارای جواب منحصر بفرد است.

۱۹.۱.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y' = \dfrac{x}{y}$. فرض کنیم $D = \{(x,y) : r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$. در این صورت اگر $(x,y),(x,z) \in D$ آنگاه:

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x,z)| &< \left|\frac{x}{y}-\frac{x}{z}\right| \\ &= \frac{|x|}{|yz|}|y-z| \\ &\leq \frac{R}{r\times r}|y-z| \\ &< \frac{2R}{r^2}|y-z|. \end{aligned}$$

پس f بر D نسبت به y در شرط لیپشیتز صدق می‌کند و لذا $\mathscr{E}$ بر D دارای جواب یکتا است.

بخش ۲.۱ روش خطوط همشیب

۱.۲.۱. تعریف روش خطوط همشیب یکی از روشهای کلی برای تعیین رفتار کلی جواب یک معادله است. در این روش از یک معادله

$$\mathscr{E} : y' = f(x,y),$$

آغاز شده و y' را به عنوان شیب منحنی جواب در نقطهٔ (x,y) تعبیر می‌کنیم. پس اگر c عددی ثابت باشد و C منحنی به معادلهٔ $f(x,y) = c$ باشد آنگاه کلیهٔ جوابهایی از $\mathscr{E}$ که از نقطه‌ای از C می‌گذرند، می‌بایستی این منحنی را با شیب c قطع کنند. به همین دلیل C را یک خط یا منحنی همشیب برای $\mathscr{E}$ نظیر به عدد c می‌نامیم.

پس از این مرحله، بر منحنی C خطوط کوچک با شیب c رسم می‌کنیم و این کار را برای مقادیر مختلف c تکرار می‌کنیم. توجه شود که اگر $c = 0$ آنگاه C نظیر به نقاط تکین جوابهای $\mathscr{E}$ است (ماکزیمم، مینیمم یا نقاط عطف). از طرفی:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

پس اگر

$$\triangle = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + c\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)},$$

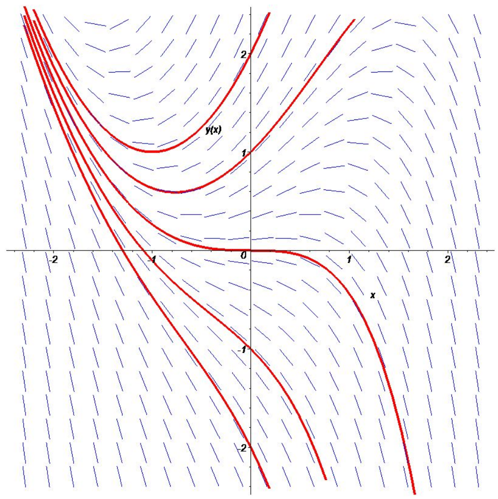
آنگاه با علامت $\triangle$ می‌توان کیفیت جواب را هنگامی که منحنی $C : f(x,y) = c$ را در نقطهٔ (x_0,y_0) قطع می‌کند بررسی نمود. اگر در حالت خاص $c = 0$، آنگاه:

- اگر $0 < \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ نقطهٔ (x_0,y_0) یک نقطهٔ مینیموم موضعی جوابی از $\mathscr{E}$ است.
- اگر $0 > \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ نقطهٔ (x_0,y_0) یک نقطهٔ ماکزیموم موضعی جوابی از $\mathscr{E}$ است.
- اگر $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ نقطهٔ (x_0,y_0) یک نقطهٔ عطف موضعی جوابی از $\mathscr{E}$ است.

در مرحلهٔ آخر باید منحنی‌هایی را ترسیم کنیم که مماس بر آنها همین خطوط کوچک ترسیم شده ـ هستند.

۲.۲.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y' = y - x^2$. در این صورت $f = y - x^2$ و به ازای هر $c \in \mathbb{R}$ ای منحنی $C_c : y - x^2 = c$ یک سهمی رو به بالا با رأس در $(0,c)$ و در جهت محور y ها است. از طرفی چون $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ پس نقاط $(x,y) \in C_0$ با $x > 0$ نقاط ماکزیموم موضعی جوابهای $\mathscr{E}$ هستند و نقاط $(x,y) \in C_0$ با $x < 0$ نقاط مینیموم موضعی جوابهای $\mathscr{E}$ هستند. [۲]

[۲] توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:
```
DETools[DEplot](diff(y(x),x)=y(x)-x^2,y(x), x=-3..3, y=-3..3, [y(0)=-3, y(0)=-2, y(0)=-1, y(0)=0, y(0)=1, y(0)=2, y(0)=3], arrows=line, color=blue, linecolor=red, thickness=4);
```

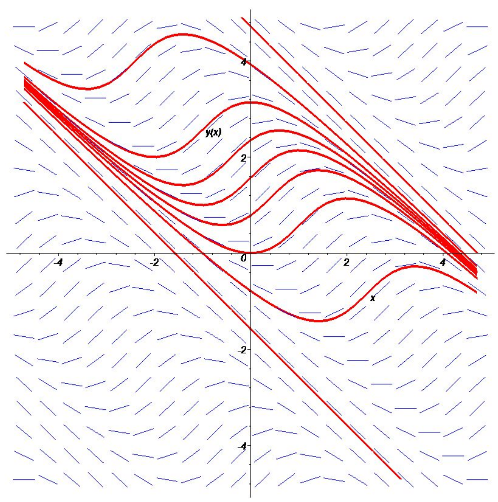


منحنیهای انتگرال معادله $y' = y - x^2$

۳.۲.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y' = \sin(x+y)$. در این صورت $f = \sin(x,y)$. پس اگر $c \in \mathbb{R}$، آنگاه:

$$C_c : f(x,y) = c : \sin(x+y) = c.$$

بنابراین $C_c = \{(x,y) : y = \arcsin c - x\}$. پس شیب جوابهای $\mathscr{E}$ بر خط $x + y = \sin\alpha$ برابر α است. اگر $\arcsin c = 0$ یعنی $c = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$، آنگاه نقاط بر منحنی C_c نقاط تکین منحنی‌های جواب $\mathscr{E}$ هستند.



منحنیهای انتگرال معادله $y' = \sin(x+y)$

چون $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y)$، اگر $x_0 + y_0 = k\pi$ آنگاه (x_0, y_0) یک نقطهٔ تکین جوابی از $\mathscr{E}$ است. حال اگر k زوج باشد، آن نقطه مینیموم موضعی است و اگر k فرد باشد یک نقطهٔ ماکزیموم موضعی است.

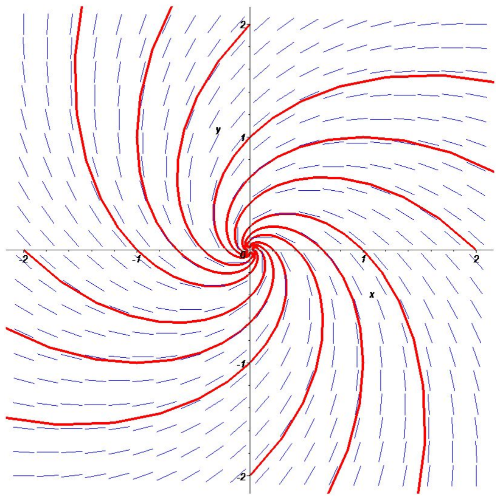
۴.۲.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y' = \frac{y-x}{y+x}$. در این صورت اگر $c \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$\begin{aligned} C_c \quad &: \quad \frac{y-x}{y+x} = c, \\ &: \quad y - x = c(y+x), x+y \neq 0, \\ &: \quad y = \frac{1+c}{1-c}x, x+y \neq 0. \end{aligned}$$

مشروط به اینکه $c \neq 1$. اما اگر $c = 1$ آنگاه:

$$\begin{aligned} C_1 \quad &: \quad \frac{y-x}{y+x} = 1, \\ &: \quad y - x = y + x, x+y \neq 0, \\ &: \quad x = 0, x+y \neq 0 \\ &: \quad x = 0 \neq y. \end{aligned}$$

بعلاوه $C_0 := y = x, x \neq 0$. در این صورت، در مجموع داریم: [۳]



منحنیهای انتگرال معادله $y' = \frac{y-x}{y+x}$

۵.۲.۱. تمرینات

۱) زاویه بین منحنی‌های انتگرال $\mathscr{E}_1 : y' = x+y$ و $\mathscr{E}_2 : y' = x-y$ در نقطه $(2,1)$ را بیابید.

۲) منحنی‌های انتگرال معادلهٔ $\mathscr{E} : y' = x^2+y^2+1$ محور x ها را در نقطهٔ $(0,0)$ با چه زاویه‌ای قطع می‌کنند؟

[۳] توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:
DETools[DEplot]([diff(y(t),t)=y(t)-x(t), diff(x(t),t)=y(t)+x(t)], [x(t), y(t)], t=-4..4, x=-2..2, y=-2..2, [[x(0)=-1, y(0)=-1], [x(0)=-1, y(0)=1], [x(0)=1, y(0)=-1], [x(0)=1, y(0)=1], [x(0)=1, y(0)=0], [x(0)=-1,y(0)=0], [x(0)=0, y(0)=-1], [x(0)=0, y(0)=1], [x(0)=-2, y(0)=0], [x(0)=2, y(0)=0], [x(0)=0, y(0)=-2], [x(0)=0, y(0)=2]], arrows=line, color=blue, linecolor=red, thickness=4);

۳) نقاط ماکزیموم موضعی جوابهای معادلهٔ $\mathscr{E}: y' = xy^2$ را بیابید.

در هر مورد، به روش خطوط همشیب، جوابهای معادلهٔ داده شده را ترسیم کنید:

$$4)\ y' = x+1,\quad 5)\ y' = \cos(x-y),\quad 6)\ y' = x+y,\quad 7)\ y' = (x+y)/(x-y),$$
$$8)\ y' = y-x,\quad 9)\ y' = x^2+y,\quad 10)\ y' = (y-1)x^2,\quad 11)\ y' = -y/x,$$
$$12)\ y' = y^2,\quad 13)\ y' = x^2+2x-y,\quad 14)\ y' = x^2-y^2,\quad 15)\ y' = y(1-y^2).$$

بخش ۳.۱ روش تقریبات متوالی - روش پیکارد

در این روش مسألهٔ

$$\mathscr{E}: y' = f(x,y),\quad y(x_0) = y_0,$$

به کمک الگوریتمی با یک حلقه محاسبه می‌گردد. به بیان دقیق‌تر؛

۱.۳.۱. قضیه *فرض کنیم معادلهٔ $y' = f(x,y)$ بر مستطیل:*

$$D: |x-x_0| < a,\ |y-y_0| < b,$$

دارای جواب منحصر بفرد است و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ای

$$\boxed{y_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt.} \tag{۱.۱}$$

در این صورت اگر

$$M := \max_{(x,y)\in D} \left|f(x,y)\right| \quad N := \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|,$$

و $h := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. در این صورت به ازای هر x ای که $|x-x_0| < h$ داریم:

$$|y(x) - y_n(x)| \le \frac{M}{n!} N^{n-1} h^n.$$

پس اگر $h < 1$، دنبالهٔ $y_n(x)$ ها به $y(x)$ یعنی جواب مسأله همگرا است.

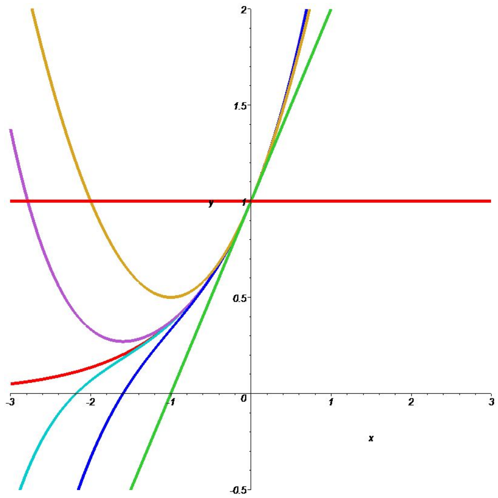
۲.۳.۱. مثال برای مسأله $y' = y$ و $y(0) = 1$ داریم

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1,\\
y_1 &= y_0 + \int_0^x y_0\,dx = 1 + x,\\
y_2 &= y_0 + \int_0^x y_1\,dx = 1 + \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2},\\
y_3 &= y_0 + \int_0^x y_2\,dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},\\
&\vdots\\
y_n &= y_0 + \int_0^x y_{n-1}\,dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

روشن است که

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x.$$



اعمال روش پیکارد برای مساله $y' = y, y(0) = 1$

که جواب مسأله است. [۴]

۳.۳.۱. مثال مسألهٔ $\mathscr{E} : y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنیم $D : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$. در این صورت:

$$M = \max_{(x,y)\in D} |x^2 + y^2| = 1 + 1 = 2, \qquad h = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2},$$
$$N := \max_{(x,y)\in D} |2y| = 2 \times 1 = 2, \qquad a = 0, \quad b = 1.$$

پس اگر y جواب $\mathscr{E}$ باشد، آنگاه:

$$\forall (x,y) \in D : |x| < \frac{1}{2} \implies |y(x) - y_n(x)| \le \frac{2^n}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{n!}.$$

[۴] توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
> y[1]:= y[0]+int(y[0],x=0..x); y[2]:= y[0]+int(y[1],x=0..x);
> y[3]:= y[0]+int(y[2],x=0..x); y[4]:= y[0]+int(y[3],x=0..x);
> y[5]:= y[0]+int(y[4],x=0..x); y[infty]:=exp(x);
> plot({y[0],y[1],y[2],y[3],y[4],y[5],y[infty]},x=-3..3,y=-1/2..2,thickness=5);
```

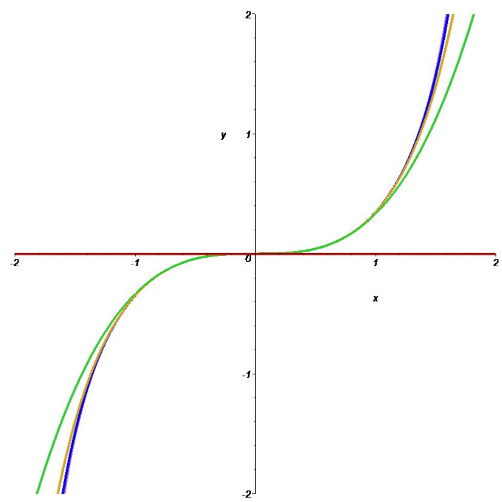
از طرفی، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_1 &= \int_0^x \left(t^2+y_0^2\right)dt = \frac{x^3}{3}, \\ y_2 &= \int_0^x \left(t^2+y_1^2\right)dt = \int_0^x \left(t^2+\frac{t^0}{9}\right)dt = \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}, \\ y_3 &= \int_0^x \left(t^2+y_1^2\right)dt = \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2579}+\frac{x^{15}}{59535}. \end{aligned}$$

بعلاوه تنها برای $n = 3$ داریم:

$$\forall x : \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Longrightarrow |y_3(x) - y(x)| < \frac{1}{6}.$$

به شکل زیر توجه شود.



اعمال روش پیکارد برای مساله $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0$

۴.۳.۱. یادداشت اگر مسأله $\mathscr{E}$ جواب منحصر بفرد نداشته باشد، آنگاه دنبالهٔ توابع $\{y_n(x)\}$ در قضیهٔ ۱.۳.۱ به حدی میل نخواهد کرد. بعنوان مثال اگر

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0, \quad y \in \mathbb{R} \\ 2x & 0 < x \le 1, \quad y < 0 \\ 2x - 4y/x & 0 < x \le 1, \quad 0 < y < x^2 \\ -2x & 0 < x \le 1, \quad x^2 < y \end{cases}$$

و $D : y \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le 1$، در این صورت به ازای هر n ای:

$$y_{2n+1} = x^2, \quad y_{2n} = -x^2.$$

۵.۳.۱. تمرینات در هر مورد به روش پیکارد مسألهٔ داده شده را تا $n = 4$ حل کنید:

1) $y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 0,$
2) $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0,$
3) $y' = x + y, \quad y(0) = 1,$
4) $y' = 2y - 2x^2 - 3, \quad y(0) = 2,$
5) $y' = 2x - y, \quad y(1) = 2,$
6) $y' = y - e^{-x}, \quad y(0) = -1,$
7) $y' = xy + 1, \quad y(-1) = 0$
8) $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, \quad y(0) = 1.$

بخش ۴.۱ معادلات تفکیک پذیر

۱.۴.۱. تعریف معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $\mathscr{E}$ را در صورتی تفکیک پذیر گوییم که آن را به یکی از دو شکل زیر بتوان نوشت:

$$\mathscr{E}_1 \quad : \quad y' = f(x).g(y),$$
$$\mathscr{E}_2 \quad : \quad f(x).g(y)\,dx + h(x).i(y)\,dy = 0.$$

۲.۴.۱. تمرینات درهر مورد، همه عبارت بر حسب x را در یک طرف و همهٔ عبارت بر حسب y را در طرف دیگر جمع می‌کنیم و سپس از دو طرف انتگرال می‌گیریم:

$$\mathscr{S}_1 \quad : \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx,$$
$$\mathscr{S}_2 \quad : \quad \int \frac{i(y)}{g(y)}\,dy = -\int \frac{f(x)}{h(x)}\,dx.$$

۳.۴.۱. مثال معادلهٔ $3e^x \tan y\,dx = (e^x - 2)\sec^2 y\,dy$ را حل کنید.

حل: با توجه به صورت مسأله داریم:

$$\frac{3e^x\,dx}{e^x - 2} = \frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy. \qquad (۲.۱)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله، داریم

$$3\ln|e^x - 2| + \ln C_1 = \ln|\tan y|.$$

پس $|\tan y| = C_1|e^x - 2|^3$ و بنابراین $\mathscr{S}_1 : y = \tan^{-1}\left(C(e^x - 2)^3\right)$ که C عدد ثابت دلخواهی است.
توجه شود که رابطهٔ (۲.۱) تنها وقتی درست است که $\tan y$ و $\mathscr{E}^x - 2$ مخالف صفر باشند. یعنی، $x \neq \ln 2$ و y مضربی از π نباشد. از طرفی ملاحظه می‌گردد توابع $x = \ln 2$ و نیز $y = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$ جوابهای معادله هستند. بنابراین، جواب عمومی معادله عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{y = \tan^{-1}\left(C(e^x - 2)^3\right) : C \in \mathbb{R}, x \neq \ln 2\right\} \cup \left\{x = \ln 2\right\} \cup \left\{y = \ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\right\}.$$

۴.۴.۱. مثال معادلهٔ $(1 + e^x)yy' = e^x$ را حل کنید.

حل: با توجه به اینکه $y' = \dfrac{dy}{dx}$ و صورت مسأله داریم:

$$y\,dy = \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx. \qquad (۳.۱)$$

پس از انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln C_1.$$

بنابراین $y^2 = 2\ln(e^x+1) + \ln C_1$ یا $\mathscr{S}_1 : y = C\sqrt{\ln(e^x+1)^2}$ که C عددی ثابت و دلخواه است.
ملاحظه می‌گردد که رابطهٔ (۳.۱) همواره برقرار است و مانعی ندارد. بنابراین $\mathscr{S}_1$ جواب عمومی معادلهٔ داده شده است.

۵.۴.۱. مثال هر یک از مسایل زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}_1 : \begin{cases} y'\sin x = y\ln y, \\ y(\pi/2) = e. \end{cases} \qquad \mathscr{E}_2 : \begin{cases} y'\sin x = y\ln y, \\ y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

حل: در هر دو مسأله معادلهٔ $y'\sin x = y\ln y$ مطرح است که تفکیک پذیر می‌باشد:

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}. \tag{۴.۱}$$

پس از انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \ln C_1;$$

یا $\ln y = C\tan\frac{x}{2}$ که C_1 عدد مثبت دلخواه و C عددی دلخواه است: $C = \pm C_1$.
بنابراین جواب عمومی معادلهٔ مفروض $y = A\exp\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ است که $A = e^C$ عددی مثبت است.
از طرفی (۴.۱) تنها وقتی ممکن است که $\sin x \neq 0$ و $y\ln y \neq 0$ یعنی x مضربی از π نباشد و $0 < y \neq 1$. بعلاوه $x = k\pi$ و $y = 0$ جواب معادله نیستند و تنها $y = 1$ در آن صدق می‌کند. پس جواب عمومی معادله عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{y = A\exp\left(\tan\frac{x}{2}\right) \middle| A > 0\right\} \cup \left\{y = 1\right\}.$$

اما شرط $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ در $\mathscr{E}_1$ به معنی $A = 1$ است. پس جواب $\mathscr{E}_1$ عبارتست از $y = \exp\left(\tan\frac{x}{2}\right)$. به صورت مشابه، شرط $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ در $\mathscr{E}_2$ به جواب $y = \frac{1}{e}\exp\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ می انجامد. بعلاوه، $y \equiv 1$ نیز در $\mathscr{E}_2$ صدق می کند؛ یعنی، مساله $\mathscr{E}_2$ دو جواب دارد!

۶.۴.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y' = x(1-y^2)$ را حل کنید.

حل: با توجه به صورت مسأله و اینکه $y' = dy/dx$ داریم:

$$\frac{dy}{1-y^2} = x\,dx. \tag{۵.۱}$$

اما $2/(1-y^2) = 1/(1+y) + 1/(1-y)$. بنابراین، از (۵.۱) داریم:

$$\frac{1}{2}\ln|1+y| - \frac{1}{2}\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln C_1.$$

در نتیجه $\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = C_1\exp(x^2)$ که C_1 عددی مثبت است. اما اگر $C_1 = \pm C$ داریم $\frac{1+y}{1-y} = C\exp(x^2)$ یا $y = \frac{Ce^{x^2}-1}{Ce^{x^2}+1}$ از طرفی (۵.۱) وقتی ممکن است که $y^2 = 1$ یا $y \neq \pm 1$، که هر دو جواب $\mathscr{E}$ هستند. بنابراین جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{y = \frac{Ce^{x^2}-1}{Ce^{x^2}+1} \;:\; C\in\mathbb{R}\right\} \cup \left\{y = 1\right\} \cup \left\{y = -1\right\}.$$

۷.۴.۱. مثال فرض کنید یک فضا پیما پس از انجام مأموریتش به اقیانوس می‌افتد. فرض کنیم دمای فضا پیما در لحظهٔ t پس از سقوط برابر $T(t)$ است و در لحظهٔ برخورد برابر α است. اگر دمای آب اقیانوس β باشد و ثابت انتقال گرما بین اقیانوس و فضا پیما ثابت k باشد، در این صورت مطابق قانون سرد شدن نیوتن، مسألهٔ زیر را داریم:

$$\mathscr{E}: \begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-\beta), \\ T(0) = \alpha. \end{cases}$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر در بر دارد. آن را به روش زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{dT}{T-\beta} = -k\,dt;$$

یا $\ln|T-\beta| = -kt + C$.
چون در عمل دمای فضا پیما $T(t)$ از دما اقیانوس β بالاتر است، بنابراین $T(t) = \beta + \exp(C-kt)$.
از شرط $T(0)=\alpha$ داریم $\exp C = \alpha - \beta$. در نتیجه $T(t) = \beta + (\alpha-\beta)\exp(-kt)$.

۸.۴.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1) $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0,$ 2) $e^{-y}(1+y') = 1,$
3) $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0,$ 4) $y' = \exp(x+y),$
5) $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0,$ 6) $y' = \sin(x-y),$
7) $2x\sqrt{1-y^2}\,dx = (1+x^2)\,dy,$ 8) $\sqrt{2xy}\,y' = 1,$
9) $(1+x^2)\,dy = y\,dx,$ 10) $y' = \dfrac{(y+1)^2}{x^2+x-2},$

هر یک از مسائل زیر را حل کنید:

11) $2(y^2-1)\,dx + \sec x \sec y\,dy = 0,$ $y(\pi/4) = 0.$
12) $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{t}(p^2-p),$ $p(1) = 2.$
13) $y + xy' = a(xy+1),$ $y(\frac{1}{a}) = -a.$
14) $(a^2+y^2)\,dx + 2x\sqrt{ax-x^2}\,dy = 0,$ $y(a) = 0.$
15) $(1+x+xy^2+y^2)\,dy = \dfrac{dx}{1-x},$ $y(0) = 1.$
16) $x^2y'\cos y + 1 = 0,$ $\lim_{x\to\infty} y = \frac{16}{3}\pi.$
17) $x^3y' = 1+\sin y,$ $\lim_{x\to\infty} y = 5\pi.$

۱۸) جواب خاص مسألهٔ $y' = y|\ln y|^\alpha$ که $0 < \alpha$ و $y(0) = 0$ را بیابید. به ازای کدام مقادیر از α جواب منحصر بفرد است؟
۱۹) فرض کنید شخصی با دمای بدن α در هوایی به دمای ثابت β و ضریب انتقال حرارت ثابت k فوت کرده است. اگر دمای کنونی بدن او γ باشد، زمان فوت او را بر حسب دمای الان بدن او مشخص کنید.

بخش ۵.۱ معادلات همگن

پس از معادلات تفکیک پذیر، معادلات دیفرانسیل همگن حداکثر فراوانی را دارند. قبل از معرفی این گونه معادلات، به ذکر یک تعریف نیاز است.

۱.۵.۱. تعریف فرض کنیم $z = f(x,y)$ تابعی دو متغیره و D زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ تعریف f است. در صورتی می‌گوییم f بر D **همگن از مرتبهٔ** k است، که به ازای هر $(x,y) \in D$ و هر $(\lambda x, \lambda y) \in D$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y).$$

تابع f را **همگن از درجه** k گوییم.

۲.۵.۱. مثال تابع $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - \frac{x^4}{y}$ بر $D : y \neq 0$ همگن از مرتبهٔ ۳ است. زیرا:

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^3 x^3 + \lambda x \lambda^2 y^2 - \frac{\lambda^4 x^4}{\lambda y} = \lambda^3 f(x,y).$$

۳.۵.۱. مثال تابع $f(x,y) = \frac{y-x}{2y+x}$ بر $D = \{(x,y) \, : \, 2y + x \neq 0\}$ همگن از درجه صفر است. زیرا

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y - \lambda x}{2\lambda y + \lambda x} = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y).$$

۴.۵.۱. مثال تابع $f(x,y) = x - y^2$ همگن نیست. زیرا اگر فرض شود همگن از مرتبهٔ k است، پس باید:

$$\forall x \forall y \forall \lambda > 0 : \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y).$$

یا $\lambda x - \lambda^2 y^2 = \lambda^k (x - y^2)$. با مشتق گیری از طرفین نسبت به x و y به دو معادله به شرح زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x = \lambda^k x \\ -2\lambda^2 y = -2\lambda^k y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda^k = 1 \\ \lambda^2 y = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

که خلاف فرض دلخواه بودن λ است.

۵.۵.۱. تعریف معادله دیفرانسیل $\mathscr{E}$ را در صورتی **همگن** گوییم که به یکی از دو صورت زیر قابل بیان باشد:

الف) $y' = f(x,y)$ که f تابعی است همگن از درجه صفر.

ب) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ که P و Q توابعی همگن از یک مرتبه‌اند.

در هر دو صورت، با فرض $\boxed{z = y/x}$ می‌توان تابعی h یافت و نوشت:

$$\mathscr{E} : y' = h(z). \tag{۶.۱}$$

۶.۵.۱. روش حل پس از اینکه معادله را به صورت (۶.۱) نوشتیم، از طرفی $z = \frac{y}{x}$ نتیجه می‌گیریم $y' = z + xz'$ یا $z + xz'(z)$؛ که یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر بر حسب تابع جدید z است:

$$\frac{dz}{h(z) - z} = \frac{dx}{x}, \tag{۷.۱}$$

و کافی است از طرفین انتگرال بگیریم.

توجه شود که (۷.۱) تنها وقتی مجاز است که $h(z) \neq z, x \neq 0$. اگر قرار باشد $x = 0$ یک جواب (۶.۱) باشد، لازم است $h(z) \equiv z$. اما، اگر α که $h(\alpha) = \alpha$ که $\alpha \in \mathbb{R}$ عددی خاص است، در این صورت $z = \alpha$ یک جواب (۶.۱) است، یعنی $y = \alpha x$. پس خطوط $y = \alpha x$ که $h(\alpha) = \alpha$ جواب خصوصی معادلهٔ مفروض هستند. پس، در مجموع

۱) اگر $h(z) = z$، آنگاه جواب عمومی معادلهٔ همگن داده شده عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{ y = Ax \,:\, A \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ x = 0 \right\}.$$

۲) اگر $h(z) \neq z$، آنگاه:

$$\mathscr{S} = \left\{ y = xz \,:\, \int \frac{dz}{h(z) - z} = \int \frac{dx}{x} \right\} \cup \left\{ y = \alpha x \,:\, h(\alpha) = \alpha \right\}.$$

۷.۵.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ را حل کنید.

حل: با فرض $y = zx$ داریم $x(z + xz') = \sqrt{x^2 - x^2z^2} + xz$ و بنابرین

$$z + xz' = \pm\sqrt{1 - z^2} + z;$$

که $\pm$ به علامت x مربوط می‌شود. پس به معادلهٔ تفکیک پذیر $xz' = \pm\sqrt{1 - z^2}$ می‌رسیم. در نتیجه، داریم

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pm\frac{dx}{x},$$

و پس از انتگرال گیری، داریم $\arcsin z = C_1 \pm \ln|x|$، که C_1 عددی ثابت است. چون $z = y/x$، پس بایستی $z = \sin(C_1 \pm \ln|X|)$ یا $y = x\sin(C_1 \pm \ln|x|)$. با فرض $C = \pm C_1$؛ و با توجه به اینکه $\sin$ تابع فرد است. نتیجه می‌گیریم $y = |x|\sin(C \pm \ln|x|)$.

از طرفی معادلهٔ $h(\alpha) = \alpha$ به معنی $\sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha = \alpha$ یا $\alpha^2 = 1$ است. بنابراین $\alpha = \pm 1$ و $y = x$ و $y = -x$ جوابهای خاص $\mathscr{E}$ هستند. پس در مجموع جوابهای $\mathscr{E}$ عبارتند از

$$\mathscr{S} = \left\{ y = |x|\sin(C \pm \ln|x|) \,:\, C \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ y = x, y = -x \right\}.$$

۸.۵.۱. مثال معادلهٔ $(x+y)\,dx = (2y-3x)\,dy$ را حل کنید.

حل: با فرض $z = y/x$ ملاحظه می‌کنیم که $dy = z\,dx + x\,dz$ و

$$\begin{aligned}(x+xz)\,dx &= (2xz-3x)(z\,dx+x\,dz),\\ (1+z)\,dx &= (2z-3)(z\,dx+x\,dz),\end{aligned}$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است؛ در واقع

$$\frac{2z-3}{2z^2-4z-1}\,dz = -\frac{dx}{x}.$$

پس از انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\Big(\sqrt{2}(z-1)\Big) + \frac{1}{2}\ln|2z^2-4z-1| = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln C,$$

که C عددی ثابت است. اکنون با توجه به اینکه $z = \frac{y}{x}$ داریم:

$$\mathscr{S} : y = x + x\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\{C(2y^2-4xy+x^2)\}\right).$$

چون در این مسأله $h(z) = \frac{1+z}{2z-3}$، مسألهٔ $h(\alpha) = \alpha$ به معنی $\alpha(2\alpha-3) = 1+\alpha$ یا $2(\alpha-1)^2+1 = 0$ است که فاقد هر گونه جواب حقیقی است. پس جواب ε دقیقاً همان دسته توابع $\mathscr{S}$ است.

۹.۵.۱. مثال معادلهٔ $2xy\,dy = (x^2+3y^2)\,dx$ را حل کنید.

حل: این معادله را به شکل $2\frac{y}{x}\,dy = \left(1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx$ می‌توان نوشت. پس با فرض $z = y/x$ داریم:

$$2z(z\,dx+x\,dz) = (1+3z^2)\,dx,$$

که به معادله $(1+z^2)\,dx = 2zx\,dz$ می‌رسیم؛ که معادله‌ای تفکیک است. بنابراین

$$\frac{2z\,dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x},\quad \ln|1+z^2| = \ln|x| + \ln C_1,$$

و با قرار دادن $z = y/x$ داریم:

$$\mathscr{S} : y^2 + x^2 = Ax,$$

که A عددی دلخواه است. بعلاوه چون در این مساله $h(\alpha) = \dfrac{1+3\alpha^2}{2\alpha}$ معادلهٔ $h(\alpha) = \alpha$ به معنی $\alpha^2+1 = 0$ است که دو جواب حقیقی ندارد. پس جواب معادلهٔ دیفرانسیل داده شده دقیقاً همان $\mathscr{S}$ معرفی شده در بالا می‌باشد.

۱۰.۵.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : xy' = y(\ln y - \ln x)$ را حل کنید.

حل: با توجه به صورت مسأله $x > 0$ و $y > 0$. بعلاوه $y' = \frac{y}{x}\ln(\frac{y}{x})$. پس $h(z) = z\ln z$. با فرض $z = \frac{y}{x}$ داریم $z + xz' = z\ln z$ یا

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم $\ln|\ln z - 1| = \ln x + \ln C$، که $C > 0$ عددی ثابت است. بنابراین $\ln z - 1 = Cx$ یا $z = \exp(Cx+1)$. با توجه به اینکه $z = y/x$، داریم $y = x\exp(Cx+1)$.

اما معادلهٔ $h(\alpha) = \alpha$ به معنی $\alpha\ln\alpha = \alpha$ است. پس یا $\alpha = 0$ و یا اینکه $\ln\alpha = 1$ که اولی غیرممکن است و دومی به معنی $\alpha = e$ است. بنابراین $y = ex$ یک جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل داده شده است و در مجموع، داریم:

$$\mathscr{S} = \left\{y = x\exp(Cx+1) \,:\, C > 0\right\} \cup \left\{y = ex\right\}.$$

۱.۵.۱۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1) $xy' = y + x\cos^2(y/x)$,	2) $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$,
3) $x^2\,dy = (y^2 - xy + x^2)\,dx$,	4) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$,
5) $2x^2y' = x^2 + y^2$,	6) $(4x-3y)\,dx + (2y-3x)\,dy = 0$,
7) $(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0$,	8) $(x-y)xy' = x^2 + y^2$,
9) $\left(y + \sqrt{x^2 - xy}\right)dx = x\,dy$,	10) $y' - y/x = \cos(1 - y/x)$.

بخش ۶.۱ معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

۱.۶.۱. تعریف فرض کنیم:

$$\boxed{\mathscr{E} : y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right),} \tag{۱.۸}$$

عددی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - \alpha b.$$

اگر $\triangle = 0$ معادلهٔ $\mathscr{E}$ را از نوع یک و در غیر این صورت آن را از نوع دو می‌نامیم.

۲.۶.۱. روش حل معادلات از نوع یک در اینگونه معادلات عددی مانند u وجود دارد که $\alpha = au$ و $\beta = bu$. از تغییر تابع $\boxed{z = ax + by + c}$ استفاده می‌کنیم. نتیجه معادله‌ای تفکیک پذیر بر حسب z و x خواهد بود.

۳.۶.۱. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : (x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$. این معادله را حل کنید.

حل: در این مسأله $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ و لذا $\mathscr{E}$ از نوع یک است. فرض کنیم $z = x + y + 1$ تابع جدید است. در این صورت $dz = dx + dy$ یا $dy = dz - dx$. بنابراین:

$$z\,dx + (2z-3)(dz - dx) = 0,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$(z-3)\,dx = (2z-3)\,dz.$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\int \left\{2+\frac{3}{z-3}\right\} dz = \int dx. \tag{۹.۱}$$

بنابراین $2z+3\ln|z-3| = x+C_1$ یا:

$$x+2y+3\ln|x+y-2| = C,$$

که C عددی ثابت است. بعلاوه (۹.۱) در صورتی ممکن است که $z \neq 3$. شرط $z = 3$ معادل $x+y=2$ یا $y = 2-x$ است که در معادلهٔ $\mathscr{E}$ صدق می‌کند. بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{x+2y+3\ln|x+y-2| = C \,:\, C\in\mathbb{R}, y\neq 2-x\right\}\cup\left\{x+y=2\right\}.$$

۴.۶.۱. مثال $\mathscr{E}: (x-y-1)^2\,dx = (x-y+1)^2\,dy$ را حل کنید.

حل: در این معادله $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. با در نظر گرفتن تابع جدید $z = x-y-1$، داریم:

$$z^2\,dx = (z-2)^2(dx-dz),$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$\frac{(z-2)^2}{4(1-z)}\,dz = dx. \tag{۱۰.۱}$$

با انتگرال گیری از طرفین (۱۰.۱) داریم:

$$\int \left\{3-z+\frac{1}{1-z}\right\} dz = \int dx.$$

در نتیجه

$$3z-\frac{z^2}{2}-\ln|z-1| = x+\frac{C}{2},$$

و با توجه به اینکه $z = x-y-1$، داریم:

$$2xy+6x = 8y+6+x^2+\ln|x-y-2|+C.$$

از طرفی (۱۰.۱) تنها وقتی ممکن است که $z\neq 1$ یا $x \neq y+2$. اما $y = x-2$ یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ است. بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{2xy+6x = 8y+x^2+\ln|x-y-2|+C \,:\, C\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{y = x-2\right\}.$$

۵.۶.۱. روش حل معادلات از نوع دو در این حالت دستگاه معادلات

$$ax+by+c=0, \qquad \alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

دارای جواب یکتا است:

$$x_0=\begin{vmatrix} -c & b \\ -\gamma & \beta \end{vmatrix} \div \triangle = \frac{b\gamma-c\beta}{a\beta-\alpha b},$$
$$y_0=\begin{vmatrix} a & -c \\ \alpha & -\gamma \end{vmatrix} \div \triangle = \frac{\alpha c-a\gamma}{a\beta-\alpha b}.$$

اکنون از متغیر جدید $\boxed{X=x-x_0}$ و تابع جدید $\boxed{Y=y-y_0}$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه معادلهٔ ε از ۱.۶.۱ به صورت زیر تبدیل می‌گردد که معادله‌ای همگن بر حسب Y و X است:

$$\frac{dY}{dx}=f\left(\frac{aX+bY}{\alpha X+\beta Y}\right).$$

۶.۶.۱. مثال معادلهٔ $(2-x-y)\,dx=(x-y+4)\,dy$ را حل کنید.

حل: در این مسأله $2=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=\triangle$ و لذا معادلهٔ داده شده از نوع دوم است. با حل دستگاه معادلات:

$$x+y-2=0, \qquad x-y+4=0,$$

داریم $y_0=3, x_0=-1$. پس فرض می‌کنیم $Y=y-3, X=x+1$ به ترتیب متغیر و تابع جدید هستند. در نتیجه، معادلهٔ جدید عبارتست از

$$-(X+Y)\,dX=(X-Y)\,dY,$$

که معادله‌ای همگن است. فرض کنیم $Z=Y/X$. دراین صورت، داریم:

$$-(X+XZ)\,dX=(X-XZ)(Z\,dX+X\,dZ),$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$\frac{1-Z}{Z^2-2Z-1}\,dZ=\frac{dX}{X}. \qquad (۱۱.۱)$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$-\frac{1}{2}\ln|Z^2-2Z-1|=\ln X-\frac{1}{2}\ln C,$$

که C عددی ثابت است. در نتیجه، چون $Z=Y/X$ داریم:

$$Y^2-2XY-X^2=C.$$

حال با توجه به اینکه $X=x+1$ و $Y=y-3$ داریم:

$$(y-x+4)^2-2(x+1)^2=C.$$

از طرفی (۱۱.۱) وقتی ممکن است که $Z^2 - 2Z - 1 \neq 0, X \neq 0$. یعنی $Y - X \neq \pm\sqrt{2}X, x \neq 1$. به بیان دیگر

$$x \neq -1, \quad y \neq (1-\sqrt{2})x + (4+\sqrt{2}), \quad y \neq (\sqrt{2}-1)x + (4-\sqrt{2}).$$

از طرفی هر دو خط اول در $\mathscr{E}$ صدق می‌کنند ($x = -1$ جواب $\mathscr{E}$ نیست). بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{(y-x+4)^2 - 2(x+1)^2 = C \,:\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

توجه شود که حالت $C = 0$ به دو خط آخر متناظر است.

۷.۶.۱. مثال $\mathscr{E} : (x+y-1)\,dx + (x-y-2)\,dy = 0$ راحل کنید.

حل: در اینجا $-2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \Delta$ و لذا $\mathscr{E}$ از نوع دو است. با حل دستگاه معادلات:

$$2x + y - 1 = 0, \quad x - y - 2 = 0.$$

داریم $x_0 = 1$ و $y_0 = 1$. از متغیر جدید $X = x - 1$ و تابع جدید $Y = y - 1$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه، به معادلهٔ همگن:

$$(2X+Y)\,dX + (X-Y)\,dY = 0,$$

می‌رسیم. حال فرض می‌کنیم $Z = Y/X$. در نتیجه:

$$(2X+XZ)\,dX + (X-XZ)(Z\,dX + X\,dZ) = 0,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$\frac{Z-1}{Z^2-2Z-2}\,dZ = -\frac{dX}{X}. \qquad (۱۲.۱)$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم:

$$\frac{1}{2}\ln|Z^2-2Z-2| = -\ln|X| + \frac{1}{2}\ln C,$$

که C عددی مثبت است. با توجه به اینکه $Z = Y/X$، داریم:

$$\ln|Y^2 - 2XY - 2X^2| = \ln C.$$

اما $X = x - 1$ و $Y = y + 1$، پس:

$$(y-x+2)^2 - 3(x-1)^2 = \pm C. \qquad (۱۳.۱)$$

اما (۱۲.۱) وقتی ممکن است که $Z^2-2Z-2 \neq 0, X \neq 0$ که معادل با $x \neq 1$ و $y-x+2 \neq \pm\sqrt{3}(x-1)$ است. دو خط آخر جواب $\mathscr{E}$ هستند و اگر در (۱۳.۱) حالت $C = 0$ را هم بپذیریم، رخ می‌دهند. پس، در مجموع جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{(y-x+2)^2 - 3(x-1)^2 = C \,:\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

۸.۶.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

1) $x + y - 2 + (1-x)y' = 0,$
2) $(3y - 7x + 7)\,dx = (3x - 7y - 3)\,dy,$
3) $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0,$
4) $3x + 4y - 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0,$
5) $(x - 2y - 1)\,dx + (3x - 6y + 2)\,dy = 0,$
6) $(y - 3x)\,dx + (x + y)\,dy = 0.$

بخش ۷.۱ معادلاتی که با تغییر تابع $y = z^\alpha$ به معادله‌ای همگن تبدیل می‌شوند

در اینگونه موارد با قرار دادن $\boxed{y = z^\alpha}$ به معادله‌ای برحسب x و z می‌رسیم. اکنون α را طوری تعیین می‌کنیم که معادلهٔ حاصل همگن باشد.

۱.۷.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : (x^2y^2 - 1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0$ را حل کنید.

حل: با فرض $y = z^\alpha$ داریم $dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$ و لذا

$$(x^2z^{2\alpha} - 1)\alpha z^{\alpha-1}\,dz + 2xz^{2\alpha}\,dx = 0. \tag{۱۴.۱}$$

بایستی ضریب dz همگن (از مرتبه‌ای مثلاً $3\alpha + 1$) باشد، پس لازم است دو جملهٔ آن همگن از یک مرتبه باشند. چون $\alpha x^2z^{2\alpha-1}$ از مرتبهٔ $3\alpha + 1$, $-\alpha z^{\alpha-1}$ از مرتبهٔ $\alpha - 1$ است. پس باید $\alpha = -1$. در این صورت (۱۴.۱) به صورت

$$\alpha(x^2/z^2 - 1)z^{-2}\,dz + 2xz^{-3}\,dx = 0,$$

در می‌آید که معادله‌ای همگن است. اکنون فرض می‌کنیم $u = z/x$. در این صورت

$$(1/u^2 - 1)\frac{1}{x^2u^2}(xdu + u\,dx) + \frac{2}{x^2u^3}\,dx = 0,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است:

$$x(u^2 - 1)\,du + (u^3 + u)\,dx = 0,$$

و در نتیجه

$$\frac{u-1}{u^3+u}\,du = -\frac{dx}{x}. \tag{۱۵.۱}$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم

$$\int \left\{\frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u}\right\} du = -\int \frac{dx}{x}.$$

در نتیجه، داریم

$$\ln(u^2 + 1) - \ln|u| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

یا $x(u^2 + 1) = \pm C_1 u$ عددی مثبت است. اما $u = z/x$، پس $z^2 + x^2 = Cx$، که C عددی مخالف صفر است. از طرفی $z = 1/y$، پس

$$1 + x^2y^2 = Cxy^2.$$

اما (۱۵.۱) در صورتی ممکن است که $u^3 + u \neq 0, x \neq 0$. یعنی $u \neq 0, x \neq 0$ و یا $\frac{1}{xy} \neq 0, x \neq 0$ که لازم است $y \neq 0$. در حالتی که $y = 0$ جواب خصوصی $\mathscr{E}$ است.
بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{1 + x^2y^2 = Cy^2 \,:\, C \neq 0\right\} \cup \left\{y = 0\right\}$$

۲.۷.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: 2xy'(x-y^2)+y^3=0$ را حل کنید.

حل: با فرض $y=z^\alpha$ داریم

$$2x(\alpha z^{\alpha-1}\,dz)(x-z^{2\alpha})+z^{2\alpha}\,dx=0.$$

بایستی جملهٔ $2\alpha x^2 z^{\alpha-1}$ و $-2\alpha x z^{3\alpha-1}$ هم مرتبه باشند. یعنی

$$3\alpha=\alpha+1.$$

پس $\alpha=\frac{1}{2}$ و لازم است $z\leq 0$. در این صورت

$$2\alpha x^2 z^{-1/2}\,dz-2\alpha x z^{1/2}\,dz+z^{3/2}\,dx=0$$

که معادله‌ای همگن است. با فرض $u=z/x$ داریم

$$\frac{1-u^{1/2}}{u^2-u^{-3/2}+u}\,du=-\frac{dx}{x}. \qquad (۱۶.۱)$$

چون $v=u^{1/2}$ داریم

$$2\int\frac{v-1}{v^3-v^2+v}dv=\int\frac{dx}{x}.$$

با انتگرال گیری از طرفین، داریم

$$\ln|v^2-v+1|+\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(2v-1)\right)-2\ln|v|=\ln|x|+\ln C,$$

که در اینجا $v=y/\sqrt{x}$. بنابراین، داریم:

$$\ln|y^2-y\sqrt{x}+x|+\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}(2y-\sqrt{x})\right)=\ln|Cx|+2\ln y,$$

که در آن $C>0$. اما (۱۶.۱) در صورتی مجاز است که $x\neq 0$ و $u^2-u^{3/2}+u\neq 0$. این معادل با $y\neq 0, x\neq 0$ است. از طرفی $y=0$ یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ است. همچنین جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از خانوادهٔ (؟؟) به همراه $y=0$.

۳.۷.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

1) $4y^6+x^3=6xy^5y'$,

2) $y\left(1+\sqrt{x^2y^4+1}\right)dx+2x\,dy=0$,

3) $\left(x+y^3\right)dx+3\left(y^2-x\right)y^2\,dy=0$,

4) $3\left(x^2-y^6\right)dy=xy\,dx$,

5) $\left(x^2-xz^4+z^8\right)dx+8z^7\left(x^2+xz^4+z^8\right)dz=0$,

6) $\left(2xy^2-x\right)dx+\left(x^2y+y\right)dy=0$.

بخش ۸.۱ معادلهٔ خطی مرتبه اول

۱.۸.۱. تعریف معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$\boxed{\mathscr{E}: y' + p(x)\,y = q(x),} \tag{۱۷.۱}$$

را خطی مرتبه اول می‌نامیم، که p و q توابعی دلخواه از x هستند.

۲.۸.۱. روش حل ابتدا فرض می‌کنیم $\mathscr{E}_h: y' + p(x)\,y = 0$ شکل همگن معادلهٔ $\mathscr{E}$ باشد. روشن است که این معادله تفکیک پذیر است و جواب آن عبارتست از

$$y_h = \exp\left(-\int p(x)\,dx\right),$$

که C عددی ثابت است. حال فرض کنیم جواب مسأله y به شکل

$$y = C(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right),$$

است! در این صورت با قرار دادن y در (۱۷.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
q(x) &= \Big(C'(x) - p(x)C(x)\Big)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) + p(x)C(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right),\\
C'(x) &= q(x)\exp\left(\int p(x)\,dx\right),\\
C(x) &= \int q(x)\exp\left(\int p(x)\,dx\right)dx.
\end{aligned}$$

پس در مجموع، داریم:

$$\boxed{y = \frac{1}{h}\left(\int hq\,dx + C\right), \qquad h = \exp\left(\int p\,dx\right).} \tag{۱۸.۱}$$

۳.۸.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ را حل کنید.

حل: با توجه به (۱۷.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
h &= \exp\left(\int p\,dx\right)\\
&= \exp\left(\int 2x\,dx\right) = e^{x^2}\\
y &= \frac{1}{e^{x^2}}\left(\int e^{x^2}2xe^{-x^2}\,dx + C\right)\\
&= e^{-x^2}\left(\int 2x\,dx + C\right) = e^{-x^2}\left(x^2 + C\right).
\end{aligned}$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

۴.۸.۱. مثال مسألهٔ زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}\ :\ x(x-1)y'+y=x^2(2x-1),\qquad y(2)=4.$$

حل: در این مسأله $q=x\dfrac{2x-1}{x-1}$ و $p=\dfrac{1}{x(x-1)}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
h &= \exp\left(\int \frac{dx}{x(x-1)}\right)\\
&= \exp\left(\int \left\{\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right\}dx\right)\\
&= \exp\left(-\ln|x|+\ln|x-1|\right)=\frac{x-1}{x},\\
y &= \frac{x}{x-1}\left(\int \frac{x-1}{x}x\frac{2x-1}{x-1}\,dx+C\right)\\
&= \frac{x}{x-1}\left(\int (2x-1)\,dx+C\right)\\
&= \frac{x}{x-1}(x^2-x+C).
\end{aligned}$$

پس در مجموع جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: y=x^2+\frac{Cx}{x-1}.$$

اما $y(2)=4$، پس $C=0$ و لذا جواب مسأله $y=x^2$ است.

۵.۸.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}:\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$ را حل کنید.

حل: این مسأله را به صورت $\dfrac{dx}{dy}=x\cos y+\sin 2y$ می‌توان نوشت. یعنی، اگر x را تابعی از y بدانیم، یک معادلهٔ خطی مرتبه اول داریم. در این حالت:

$$q=\sin 2y,\qquad p=-\cos y.$$

در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}
h &= \exp\left(\int p(y)\,dy\right)\\
&= \exp(-\cos y\,dy)=\exp(-\sin y),\\
x &= \frac{1}{h}\left(\int hq(y)\,dy+C)\right)\\
&= \exp(\sin y)\left(\int \sin 2ye^{-\sin y}\,dy+C\right)\\
&\overset{(1)}{=} e^n\left(-2\int ue^{-u}\,du+C\right)\\
&= e^u\left(2(u+1)e^{-u}+C\right).
\end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$S : x = 2(\sin y + 1) + Ce^{\sin y},$$

که در (۱) فرض شده است $u = \sin y$.

۱.۸.۶. مثال جوابی از معادلهٔ $y' - y = \cos x - \sin x$ بیابید که در $(0;\infty)$ کراندار باشد.

حل: در این مسأله، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int -1\,dx\right) = e^{-x}, \\ y &= e^{+x}\left(\int e^{-x}(\cos x - \sin x)\,dx + C\right) \\ &= e^{x}\left(e^{-x}\sin x + C\right) \\ &= Ce^{x} + \sin x. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که اگر $C \neq 0$، آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty} y$ بینهایت می‌شود و کراندار نیست، پس لازم است که $C = 0$ و لذا $y = \sin x$ جواب خواسته شده است.

۱.۸.۷. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1) $y' + 2y = e^{-x}$,　　2) $y' + 2xy = 3e^{-x^2}$,
3) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$,　　4) $xy' - 2y = x^3\cos x$,
5) $y' = 1/(2y\ln y + y - x)$,　　6) $y' x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$,
7) $y' + xe^{x}y = e^{(1-x)e^{x}}$,　　8) $y' = 1/\left(xe^{y} + 2ye^{e^{y}}\right)$,
9) $y' - \cot xy = \csc x$,　　10) $y' = 3y\tan x + 2$.

هر یک از مسائل زیر را حل کنید:

11) $xy' = 2y - x^2, \qquad y(1) = 0$
12) $\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta = 0, \qquad r(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$,
13) $xy' + 2y = x^2, \qquad y(-1) = 5/4$,
14) $y'\cos x - y\sin x = 2x, \qquad y(0) = 0$,
15) $2xy' - y = 1 - 2/\sqrt{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = -1$,
16) $x^2y' + y = 2x, \qquad \lim_{x\to 0} y(x)$کراندار,
17) $y'\cos x + \sin 2x = y\sin x, \qquad \lim_{y\to 0} x(y) = \frac{\pi}{2}$.

بخش ۱.۹ معادلهٔ برنولی

۱.۹.۱. تعریف معادلهٔ مرتبه اول

$$\boxed{\mathscr{E} : y' + p(x)y = q(x)y^n,} \qquad (۱.۱۹)$$

که n عددی حقیقی و مخالف ۰ و ۱ است را اصطلاحاً **معادلهٔ برنولی** می‌نامند.

۲.۹.۱. روش حل اگر از تغییر تابع $\boxed{z = y^{1-n}}$ استفاده کنیم حاصل یک معادله مرتبه اول خطی خواهد شد.

۳.۹.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y' - y\cos x = y^2 \cos x$ را حل کنید.

حل: در اینجا $n = 2$، پس از تابع جدید $z = y^{1-2} = 1/y$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$-z^{-2}z' - z^{-1}\cos x = z^{-2}\cos x. \tag{۲۰.۱}$$

چنانچه طرفین این تساوی را در $-z^2$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$z' + z\cos x = -\cos x,$$

که یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int \cos x\, dx\right) = \exp(\sin x), \\ z &= \frac{1}{\exp(\sin x)}\left(\int \exp(\sin x)(-\cos x)\, dx + C\right) \\ &= \exp(-\sin x)(-\exp(\sin x) + C) \\ &= Ce^{-\sin x} - 1. \end{aligned}$$

اما $z = 1/y$، پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از (در (۲۰.۱) فرض شده است $y \neq 0$):

$$\mathscr{S} = \left\{y = 1/\left(Ce^{-\sin x} - 1\right) : C \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{y = 0\right\}.$$

۴.۹.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y' = xy - xy^3$ را حل کنید.

حل: در اینجا $n = 3$، پس از تغییر تابع $z = y^{1-3} = 1/y^2$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $y = z^{-1/2}$ و معادلهٔ داده شده، عبارت است از

$$-\frac{1}{2}z^{-3/2}z' = xz^{-1/2} - xz^{-3/2}. \tag{۲۱.۱}$$

اگر طرفین این تساوی را در $-2z^{3/2}$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$z' + 2xz = 2x,$$

که یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول است. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int 2x\, dx\right) = \exp\left(x^2\right), \\ z &= \frac{1}{\exp(x^2)}\left(\int \exp\left(x^2\right) 2x\, dx + C\right) \\ &= e^{-x^2}\left(e^{x^2} + C\right) = 1 + Ce^{x^2}. \end{aligned}$$

اما $z = 1/y^2$، پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{y^2(1 + Ce^{x^2}) = 1 : C \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{y = 0\right\}.$$

توضیح اینکه در (۲۱.۱) فرض ده بود $y \neq 0$، به همین دلیل $y = 0$ اضافه شده است.

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

۵.۹.۱. مثال معادلهٔ $y'-2ye^{x}=4\sqrt{ye^{x}}$ را حل کنید.

حل: در این مسأله $n=\frac{1}{2}$، پس از تغییر تابع $z=y^{1-1/2}=\sqrt{y}$ استفاده می‌کنیم. نتیجه اینکه

$$2zz'-2z^{2}e^{x}=4ze^{x}. \tag{۲۲.۱}$$

با تقسیم طرفین بر $2z$، نتیجه می‌گیریم:

$$z'-2e^{x}z=2e^{x},$$

که یک معادلهٔ خطی مرتبه اول است. بنابراین:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int -2e^{x}\,dx\right)\\ &= \exp(-2e^{x}),\\ z &= \exp(2e^{x})\left(\int \exp(-2e^{x})\times 2e^{x}\,dx+C\right)\\ &= \exp(2e^{x})(-\exp(2e^{x})+C)\\ &= C\exp(2e^{x})-1. \end{aligned}$$

از طرفی $z=\sqrt{y}$، بنابراین جواب عمومی معادله داده شده عبارتست از

$$\mathscr{S}=\left\{y=(C\exp(2e^{x})-1)^{2}\ :\ C\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{y=0\right\}.$$

جواب $y=0$ از این رو به وجود آمد که در (۲۲.۱) طرفین را بر $2z$ تقسیم کرده‌ایم، یعنی فرض نموده‌ایم که $z\neq 0$. $z=0$ به معنی $y=0$ است که یک جواب خصوصی مسأله است.

۶.۹.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

1) $\left(x^{3}+e^{y}\right)y'=3x^{2}$ 2), $y'+2xy=y^{2}\exp\left(x^{2}\right)$,
3) $y'+y=y^{2/3}$, 4) $\left(x^{2}+y^{2}+1\right)dy+xy\,dx=0$,
5) $2y'\ln x+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos x}{y}$, 6) $2y'\sin x+y\cos x=y^{3}\sin^{2}x$,
7) $y'+xy=xy^{-3}$, 8) $y'=y+y^{2}e^{-x}$,
9) $y'+xy^{3}e^{-2x}=y$, 10) $x\,dy=y(xy-1)\,dx$,
11) $xy'+y+x^{2}y^{2}e^{x}=0$, 12) $xy'=x^{2}y^{2}-y$.

بخش ۱۰.۱ معادلهٔ ریکاتی

۱.۱۰.۱. تعریف معادلهٔ مرتبه اول غیر خطی

$$\boxed{\mathscr{E}\ :\ y'+p(x)y+q(x)y^{2}=r(x),} \tag{۲۳.۱}$$

را به افتخار ریاضیدان ایتالیایی کنت ژاکوپو فرانچسکو ریکاتی (۱۶۷۶-۱۷۵۴)، **معادلهٔ ریکاتی** می‌نامند. روشن است که اگر $r\equiv 0$ معادلهٔ $\mathscr{E}$ از نوع برنولی می‌شود و اگر $q\equiv 0$ از نوع خطی مرتبه اول خواهد شد. پس فرض می‌شود r و q صفر نیستند.

۲.۱۰.۱. روش حل فرض کنید $y = y_1$ یک جواب خصوصی معادلهٔ $\mathscr{E}$ است، در این صورت از تابع جدید $u = u(x)$ استفاده می‌کنیم که $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{u}}$ یا $u = \frac{1}{y-y_1}$. پس از جایگذاری به یک معادلهٔ خطی مرتبه اول می‌رسیم:

$$u' - (p + 2y_1 q)u = q.$$

۳.۱۰.۱. مثال چنانچه بدانیم $y_1 = x$ یک جواب از معادلهٔ $x^2y' + y^2 = xy + x^2$ است، جواب عمومی آن را بیابید.

حل: در این مسأله $y' - (\frac{1}{x})y + (\frac{1}{x^2})y^2 = 1$، یعنی $p = -1/x$ و $q = 1/x^2$ و $r = 1$. پس فرض می‌کنیم $u = 1/(y-x)$ یا $y = x + 1/u$. در این صورت:

$$\left(1 - \frac{u'}{u^2}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 = 1,$$

یا پس از ساده کردن $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}$، که یک معادلهٔ خطی مرتبه اول است. بنابراین

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int -\frac{1}{x}\,dx\right) \\ &= \exp(-\ln x) = \frac{1}{x}, \\ u &= x\left(-\int \frac{1}{x}.\frac{1}{x^2}\,dx + C\right) \\ &= x\left(\frac{x^{-2}}{-2} + C\right) = Cx - \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

اما $y = x + 1/u$، پس جواب مسألهٔ داده شده عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = x + \frac{2x}{Cx^2 - 1}.$$

۴.۱۰.۱. مثال فرض کنید $\mathscr{E} : y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$ و $y_1 = e^x$ یک جواب خصوصی آن است. $\mathscr{E}$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = e^x + 1/u$، در این صورت

$$e^x - u'/u^2 - \left(e^u + \frac{1}{u}\right)^2 + 2e^x\left(e^x + \frac{1}{u}\right) = e^{2x} + e^x - \frac{u'}{u^2} - \frac{1}{u^2} = 0.$$

بنابراین $u' = -1$ یا $u = C - u$. اما $y = e^x + 1/u$، در نتیجه جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$S : y = e^x + \frac{1}{C - x}.$$

۵.۱۰.۱. مثال نشان دهید که اگر y_2, y_1 دو جواب خصوصی متفاوت از یک معادلهٔ ریکاتی باشند و ضریب y^2 برابر $q(x)$ باشد، آنگاه جواب عمومی معادلهٔ مفروض عبارتست از

$$\mathscr{S} : \frac{y - y_1}{y - y_2} = C\exp\left(\int q(x))y_2 - y_1)\,dx\right).$$

حل: فرض کنیم $\mathscr{E}$ معادلهٔ در ۱-۱۰-۱ است، مطابق فرض بایستی $y_1' + py_1 + qy^2{}_1 = r$ پس با کم کردن این معادله از $\mathscr{E}$، داریم:

$$(y-y_1)' + p(y-y_1) + q(y^2 - y_1^2) = 0. \tag{۲۴.۱}$$

به صورت مشابه، داریم:

$$(y-y_2)' + p(y-y_2) + q(y^2 - y_2^2) = 0. \tag{۲۵.۱}$$

معادلهٔ (۲۴.۱) را بر $y - y_1$ و معادلهٔ (۲۵.۱) را بر $y - y_2$ تقسیم کرده و معادلات حاصل را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{(y-y_1)'}{y-y_1} - \frac{(y-y_2)'}{y-y_2} + q(y-y) &= 0,\\
(\ln(y-y_1))' - (\ln(y-y_2))' + 1(y-y) &= 0,\\
\left(\ln\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right)\right)' &= q(y_2 - y_1).
\end{aligned}$$

که نتیجهٔ مورد نظر، با انتگرال گیری از طرفین حاصل می‌شود.

۶.۱۰.۱. مثال در صورتی که بدانیم $1/x \pm m/x^2$ جواب خصوصی معادلهٔ $y' + y^2 = \frac{m^2}{x^4}$ هستند، جواب عمومی آن را بیابید.

حل: با توجه به مثال ۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{y - 1/x - m/x^2}{y - 1/x + m/x^2} &= C\exp\left(\int \frac{2m}{x^2}\,dx\right),\\
\frac{yx^2 - x - m}{yx^2 - x + m} &= C\exp\left(\frac{-2m}{x}\right),
\end{aligned}$$

۷.۱۰.۱. تمرینات در صورتی که y_1 یک جواب خصوصی معادلهٔ داده شده باشد، جواب عمومی آن را بیابید.

1) $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x},$ $\quad y_1 = e^x,$
2) $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x = \cos x,$ $\quad y_1 = \sin x,$
3) $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x,$ $\quad y_1 = x,$
4) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1,$ $\quad y_1 = -1/x,$
5) $y' = 1 + y/x - y^2/x^2,$ $\quad y_1 = x,$
6) $y' = x^3(y-x)^2 + y/x,$ $\quad y_1 = x,$
7) $y' = -2/x + (1/x - 2)y - y^2,$ $\quad y_1 = 2, \ x > 0,$
8) $y' = x^3 + 2y/x - y^2/x,$ $\quad y_1 = -x^2,$
9) $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1,$ $\quad y_1 = 1.$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

بخش ۱۱.۱ معادلهٔ دیفرانسیل کامل

۱.۱۱.۱. تعریف منظور از یک **عبارت دیفرانسیلی**، عبارتی به صورت

$$\eta = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

است که P و Q توابعی دو متغیره هستند. در صورتی η را **کامل** گوییم که تابعی دو متغیره $z = f(x,y)$ چنان یافت گردد که $df = \eta$. یا بطور معادل، باید:

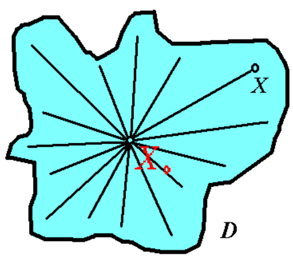
$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y).$$

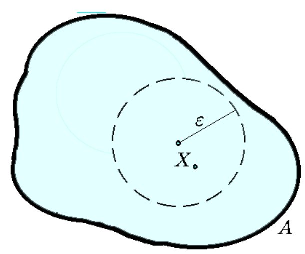
معادله دیفرانسیل $P\,dx + Q\,dy = 0$ را در صورتی **کامل** گوییم که عبارت دیفرانسیلی سمت چپ آن کامل باشد.

۲.۱۱.۱. تعریف زیر مجموعهٔ D از $\mathbb{R}^2$ را در صورتی **باز** گوییم که به ازای هر $X_0 \in D$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $X_0 \in D$ عددی $\varepsilon > 0$ چنان یافت گردد که

$$\forall X \;:\; \|X - X_0\| < \varepsilon \Longrightarrow X \in D.$$

به شکل توجه شود. این مجموعه را در صورتی **ستاره شکل** گوییم که نقطه‌ای $X_0 \in D$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $X \in D$ ای پاره خط $\overline{XX_0}$ در D قرار داشته باشد. به شکل توجه شود.





۳.۱۱.۱. تعریف عبارت دیفرانسیلی $\eta = P\,dx + Q\,dy$ را در صورتی دقیق گوییم که $\boxed{P_y = Q_x}$.

روشن است که هر عبارت کامل دقیق است، زیرا اگر f ای باشد که $f_x = P$ و $f_y = Q$، آنگاه

$$P_y = (f_x)_y = f_{xy} = f_{yx} = (f_y)_x = Q_x.$$

اما عکس این مطلب در حالت کلی ممکن است درست نباشد.

۴.۱۱.۱. قضیه (پوانکاره) *اگر مجموعهٔ D باز و ستاره شکل باشد و توابع P و Q بر D مشتق پذیر باشند، در این صورت اگر عبارت $\eta = P\,dx + Q\,dy$ دقیق باشد، آنگاه کامل است. یعنی f ای بر D هست که $f_x = P$ و $f_y = Q$.*

۵.۱۱.۱. نتیجه *فرض کنید D مجموعه‌ای باز و ستاره شکل است و توابع P و Q بر D مشتق پذیرند. اگر $P_y = Q_x$، آنگاه معادله دیفرانسیل $P\,dx + Q\,dy = 0$ کامل است. بنابراین، تابع دو متغیرهٔ $z = f(x,y)$ بر D وجود دارد به نحوی که $f_x = P$ و $f_y = Q$. در این صورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مورد نظر عبارتست از $\mathscr{S} : f(x,y) = C$ که C عددی دلخواه است.*//

۶.۱۱.۱. مثال معادلهٔ

$$\mathscr{E} \;:\; (x^3 + xy^2)\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0$$

را حل کنید.

حل: در این مسأله $Q = x^2y + y^3$ و $P = x^3 + xy^2$ و $D = \mathbb{R}^2$. چون $P_y = 2xy = Q_x$، این معادله کامل است. پس $z = f(x,y)$ ای هست که

$$\begin{cases} f_x = x^3 + xy^2, \\ f_y = x^2y + y^3, \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{cases} f = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2y^2 + A(y), \\ f = \dfrac{1}{2}x^2y^2 + \dfrac{1}{4}y^3 + B(x). \end{cases} \tag{۲۶.۱}$$

توضیح اینکه در (۱) از طرفین معادلهٔ اول نسبت به x و از طرفین معادلهٔ دوم نسبت به y انتگرال گرفته‌ایم و A و B توابعی دلخواهند. با مقایسهٔ (۲۶.۱) نتیجه می‌گیریم که $(y) = \frac{1}{2}y^4 + C_1$ و $B(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + C_2$ که C_1 و C_2 اعداد ثابت هستند. پس صورت کلی f عبارت از $f = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{4}y^4 + \dfrac{1}{2}x^2y^2 + C_3$ است که C_3 عددی ثابت است. پس جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده عبارت است از $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = C_4$.
با فرض $C_4 = C^4$، که $C \geq 0$، داریم

$$\mathscr{S} : x^2 + y^2 = C^2,$$

که C عددی دلخواه و نامنفی است. یعنی، نمودار جوابهای این معادله عبارتند از مبداء و همه دوایر به مرکز در مبداء.

۷.۱۱.۱. مثال معادلهٔ

$$\mathscr{E} : \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2y}\right) dx - \frac{x^2 + y^2}{xy^2}\, dy = 0$$

را حل کنید.

حل: در این مسأله

$$P = 2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2y}, \qquad Q = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}, \qquad D : x \neq 0 \neq y.$$

ملاحظه می‌شود که $-1/y^2 + 1/x^2 = P_y = Q_x$ اما مجموعهٔ D ستاره شکل نیست. آن را به چهار قسمت باز و ستاره شکل می‌توان تقسیم نمود:

$$D = D_{++} \cup D_{+-} \cup D_{-+} \cup D_{--}, \qquad \begin{array}{l} D_{++} \;:\; 0 < x,\; 0 < y, \\ D_{+-} \;:\; 0 < x,\; 0 > y, \\ D_{-+} \;:\; 0 > x,\; 0 < y, \\ D_{--} \;:\; 0 > x,\; 0 > y, \end{array}$$

پس بنا به ۵.۱۱.۱ معادله بر هر یک از مجموعه‌ها دارای جواب است. اگر $f_x = P$ و $f_y = Q$، آنگاه:

$$\begin{cases} f_x = 2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2y} \\ f_y = -\dfrac{x^2+y^2}{xy^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = x^2 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + A(y) \\ f = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + B(x) \end{cases}$$

و بامقایسهٔ آنها داریم $f = x^2 + x/y - y/x$. بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ داده شده عبارتست از توابع چهار ضابطه‌ای ضمنی به شرح زیر:

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = C_1, & \text{اگر } 0 < x, 0 < y \\ x^2 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = C_2, & \text{اگر } 0 < x, 0 > y \\ x^2 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = C_3, & \text{اگر } 0 > x, 0 < y \\ x^2 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = C_4, & \text{اگر } 0 > x, 0 > y \end{cases}$$

۸.۱۱.۱. مثال معادلهٔ

$$\mathscr{E} : \frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right) dy = 0,$$

را حل کنید.

حل: دامنهٔ معادلهٔ مذکور عبارتست از

$$D : \cos xy \neq 0 : xy \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

که اجتماعی از بینهایت مجموعهٔ باز از هم جدا می‌باشد که هیچ کدام بجز داخلی ترین آنها ستاره شکل نیست. با این حال معادله کامل است:

$$\begin{aligned} P_y = Q_x &= \frac{1}{\cos^2 xy} + y\left(1 + \tan^2(xy)\right) \\ &= (1 + 2\tan(xy)) \times (1 + \tan^2(xy)). \end{aligned}$$

بعلاوه، بر هر زیر مجموعهٔ ستاره شکل از D، f ای هست که

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{y}{\cos^2 xy} + \sin x, \\ f_y = \dfrac{x}{\cos^2 xy} + \sin y, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = \tan(xy) - \cos x + A(y), \\ f = \tan(xy) - \cos y + B(y). \end{cases}$$

و پس از مقایسه داریم:

$$\mathscr{S} : \tan(xy) = \cos x + \cos y + C.$$

۹.۱۱.۱. تعریف فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از صفحه است. در صورتی می‌گوییم D همبند است که به ازای هر منحنی بستهٔ C در D، کل داخل C در D قرار داشته باشد. به شکل زیر توجه شود. روشن است که هر مجموعهٔ ستاره شکل همبند ساده است ولی عکس آن غلط است.

۱.۱۱.۱۰. قضیه (تعمیم قضیهٔ پوانکاره) *اگر D همبند ساده و باز باشد و توابع P و G بر D مشتق‌پذیر باشند و $P_y = Q_x$ آنگاه معادلهٔ $P\,dx + Q\,dy = 0$ بر D کامل است.*

۱.۱۱.۱۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

$$
\begin{array}{ll}
1) & x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y' = 0,\\
2) & (3x^2+6xy^2)\,dx + 6x^2y+4y^3)\,dy = 0,\\
3) & \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0,\\
4) & \left(2x+\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx = \dfrac{x^2+y^2}{xy^2}\,dy,\\
5) & \left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0,\\
6) & (3x^2-2x-y)\,dx+(2y-x+3y^2)\,dy = 0,\\
7) & y(x^2+y^2+a^2)\,dy + x(x^2+y^2-a^2)\,dx = 0,\\
8) & (3x^2y+y^3)\,dx+(x^3+3xy^2)\,dy = 0,\\
9) & \left(\sin y + y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy = 0,\\
10) & \dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2} = 0.
\end{array}
$$

بخش ۱.۱۲ فاکتور انتگرال

ممکن است یک معادله کامل نباشد، اما با ضرب کردن تابعی در آن، به یک معادلهٔ کامل تبدیل گردد. این تابع را اصطلاحاً فاکتور انتگرال می‌نامند.

۱.۱۲.۱. تعریف تابع $\mu = \mu(x,y)$ را در صورتی یک فاکتور انتگرال معادلهٔ

$$\mathscr{E} : P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

گوییم که معادلهٔ حاصلضربی:

$$\boxed{\mathscr{E}_e : \mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y) = 0,} \qquad (۱.۲۷)$$

کامل باشد.

چنانچه معادله غیر کاملی در اختیار باشد، و بتوانیم فاکتور انتگرالی برای آن بیابیم، آنگاه در اغلب موارد جوابهای معادله کامل حاصله با جوابهای معادله اولیه یکی هستند. در واقع

۱.۱۲.۲. قضیه *فرض کنید $\mu(x,y)$ فاکتور انتگرالی برای معادله $\mathscr{E}_i$ است که بر دامنه I مخالف صفر است و $\mathscr{E}_e$ معادله کامل شده باشد. در این صورت مجموعه جوابهای $\mathscr{E}_i$ و $\mathscr{E}_e$ بر I با هم برابرند.*

۱.۱۲.۳. مثال معادله دیفرانسیل $\mathscr{E} : (x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$ کامل نیست. توابع $1/(x+y)^2$، $1/(x-y)^2$، $1/(x^2+y^2)$ و بسیاری توابع دیگر، فاکتور انتگرال آن هستند! جواب عمومی معادله حاصل، عبارت است از

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C.$$

در نتیجه، فاکتور انتگرال μ در صورت وجود منحصر بفرد نیست.

۴.۱۲.۱. روش حل شرط لازم برای کامل بودن $\mathscr{E}_e$ عبارتست از

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

و یا

$$\boxed{\mathscr{E}_i : P\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y} - Q\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x} = Q_x - P_y,} \qquad (۲۸.۱)$$

که البته $\mathscr{E}_i$ یک معادلهٔ با مشتقات جزئی است و حل آن اغلب دشوارتر از خود $\mathscr{E}$ است! اغلب با حدس زدن تیپ کلی μ، حداقل یک μ (که کافی است) یافت می‌شود.

۵.۱۲.۱. نتیجه (μ تابعی از x) *اگر μ تابعی از x باشد. در این صورت بایستی $(P_y - Q_x)/Q$ تابعی فقط از x باشد و بعلاوه*

$$\boxed{\mu(x) = \exp\left(\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,dx\right).} \qquad (۲۹.۱)$$

۶.۱۲.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : (x+y^2)\,dx = 2xy\,dy$ را حل کنید.

حل: فرض کنید ε یک فاکتور انتگرال به شکل $\mu(x)$ دارد. پس بنا به ۵.۱۲.۱ باید:

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \exp\left(\int \frac{(x+y^2)_y - (-2xy)_x}{-2xy}\,dx\right)\\
&= \exp\left(\int \frac{2y+2y}{2xy}\,dx\right)\\
&= \exp\left(\int \frac{2\,dx}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

پس صورت کامل شدهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}_e : \frac{x+y^2}{x^2}\,dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0.$$

توجه شود که فرض کرده‌ایم $x \neq 0$، در حالی که $x = 0$ یک جواب مسألهٔ $\mathscr{E}$ است. معادلهٔ کامل $\mathscr{E}_e$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{x+y^2}{x^2}, \\ f_y = -\dfrac{2y}{x}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = \ln|x| - \dfrac{y^2}{x} + A(y), \\ f = -\dfrac{y^2}{x} + B(y), \end{cases}$$

و با مقایسه داریم $f = \ln|x| - \frac{y^2}{x}$. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{x\ln|x| = y^2 + xC \,\middle|\, C \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\} \cup \left\{x = 0\right\}.$$

۱.۱۲.۷. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: (x^4\ln x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$ را حل کنید.

حل: با فرض اینکه فاکتور انتگرال $\mathscr{E}$ به شکل تابعی از x است، داریم:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \exp\left(\int \frac{(x^4\ln x - 2xy^3)_y - (3x^2y^2)_x}{3x^2y^2}\,dx\right)\\ &= \exp\left(-4\int \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

پس شکل کامل شدهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}_e: \left(\ln x - 2\frac{y^3}{x^3}\right)dx + 3\frac{y^2}{x^2}\,dy = 0.$$

البته، فرض کرده‌ایم $x \neq 0$. اما $x=0$ در دامنهٔ $\mathscr{E}$ نیست و مشکلی پیش نمی‌آورد. اکنون $\mathscr{E}_e$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f = \ln x - 2\dfrac{y^3}{x^3}, \\ f = 3\dfrac{y^2}{x^2}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = x\ln x - x + \dfrac{y^3}{x^2} + A(y), \\ f = \dfrac{y^3}{x^2} + B(x). \end{cases}$$

و با مقایسهٔ آنها، داریم $f = x\ln x - x + y^3/x^2$. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: x\ln x + \frac{y^3}{x^2} = x + C, \qquad x > 0.$$

۱.۱۲.۸. نتیجه (μ تابعی از y) *اگر μ تابعی از y باشد، در این صورت بایستی $(Q_x - P_y)/P$ تابعی از فقط y باشد و بعلاوه:*

$$\boxed{\mu(y) = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{P}\,dy\right).} \qquad (۱.۳۰)$$

۱.۱۲.۹. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: 2xy\ln y\,dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\,dy = 0$ را حل کنید.

حل: چنانچه $\mathscr{E}$ یک فاکتور انتگرال به شکل $\mu(u)$ بپذیرد، داریم:

$$\begin{aligned}\mu(y) &= \exp\left(\int \frac{\left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)_x - (-2xy\ln y)_y}{2xy\ln y}\,dy\right)\\ &= \exp\left(\int \frac{-2x\ln y}{2xy\ln y}\,dy\right)\\ &= \exp\left(\int \frac{-dy}{y}\right) = \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

پس شکل کامل شدهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}_e: 2x\ln y\,dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0.$$

این معادلهٔ کامل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x = 2x\ln y, \\ f_y = \dfrac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = x^2\ln y + A(y), \\ f = x^2\ln y + \dfrac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} + B(x). \end{cases}$$

با مقایسهٔ آنها، داریم:

$$f = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} + \text{ثابت}.$$

پس جواب عمومی معادلهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ 3x^2\ln y + (y^2+1)^{3/2} = C, \qquad y > 0.$$

۱.۱۲.۱۰. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : (1+x)e^x\,dx = (-ye^y + xe^x)\,dy$ را حل کنید.

حل: اگر $\mathscr{E}$ یک فاکتور انتگرال به شکل $\mu(y)$ داشته باشد، بایستی:

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \exp\left(\int \frac{(ye^y - xe^x)_x - ((1+x)e^x)_y}{(1+x)e^x}\,dy\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{-(1+x)e^x}{(1+x)e^x}\,dy\right) \\ &= \exp\left(\int -dy\right) = e^{-y}. \end{aligned}$$

پس شکل کامل شدهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}_e : (1+x)e^{x-y}\,dx + (y - xe^{x-y})\,dy = 0.$$

این معادلهٔ کامل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x = (1+x)e^{x-y}, \\ f_y = y - xe^{x-y}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = xe^{x-y} + A(y), \\ f = \dfrac{y^2}{2} + xe^{x-y} + B(x). \end{cases}$$

با مقایسهٔ آنها، نتیجه می‌گیریم:

$$f = \frac{y^2}{2} + xe^{x-y} + \text{ثابت}.$$

پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y^2 + 2xe^{x-y} = C.$$

۱.۱۲.۱۱. نتیجه (μ تابعی از $u = u(x,y)$) *اگر μ تابعی از $u = u(x,y)$ باشد، در این صورت معادلهٔ $\mathscr{E}_i$ به شکل*

$$P\frac{\partial u}{\partial y}\frac{d\mu}{du} - Q\frac{\partial u}{\partial x}\frac{d\mu}{du} = Q_x - P_y,$$

است و در نتیجه

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P.u_y - Q.u_x}\, du.$$

این معادله در صورتی حل پذیر است که ضریب du در بالا، تابعی فقط از u باشد:

$$\boxed{\mu = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{P.u_y - Q.u_x}\, du\right).} \qquad (۳۱.۱)$$

۱۲.۱۲.۱. مثال در صورتی که بدانیم معادلهٔ

$$\mathscr{E} \,:\, (y^3 + xy^2 + y)\,dx + (x^3 + x^2y + x)\,dy = 0,$$

فاکتور انتگرالی به شکل $\mu(xy)$ دارد، آن را حل کنید.

حل: در اینجا $u = xy$، پس بنا به ۱۱.۱۲.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
\mu &= \exp\left(\int \frac{(3x^2+2xy+1)-(3y^2+2xy+1)}{(y^3+xy^2+y)x-(x^3+x^2y+x)y}\,du\right)\\
&= \exp\left(\int \frac{3x^2-3y^2}{y^3x-x^3y}\,du\right)\\
&= \exp\left(\int \frac{-3du}{u}\right)\\
&= \frac{1}{u^3} = \frac{1}{x^3y^3}.
\end{aligned}$$

پس شکل کامل شدهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}_e : \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3y^2}\right) dx + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y^3}\right) dy = 0,$$

که جواب آن چنین است:

$$\mathscr{S} = \left\{x^2 + y^2 + xy = 1 + Cx^2y^2 \,:\, C \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{x = 0\right\} \cup \left\{y = 0\right\}.$$

۱۳.۱۲.۱. مثال در صورتی که بدانیم معادلهٔ $\mathscr{E} : y\,dx = (y^2 + x^2 + x)\,dy$ فاکتور انتگرالی به شکل $\mu(x^2+y^2)$ دارد، آن را حل کنید.

حل: در اینجا $u = x^2 + y^2$، پس بنا به ۱۱.۱۲.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
\mu &= \exp\left(\int \frac{(-2x-1)-(1)}{(y)(2y)+(y^2+x^2+x)(2x)}\,du\right)\\
&= \exp\left(\int \frac{-(x+1)}{x^3+x^2+xy^2+y^2}\,du\right)\\
&= \exp\left(-\int \frac{du}{u}\right) = \frac{1}{u}.
\end{aligned}$$

پس شکل کامل شدهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}_e : \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}\,dy = 0,$$

که جواب عمومی آن چنین است:

$$\mathscr{S} = \left\{ y + \arctan\frac{y}{x} = C \;:\; C \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ x = 0 \right\}.$$

۱۴.۱۲.۱. مثال در صورتی که بدانیم $\mathscr{E} : y(x^3+2y^4)\,dx = x(3x^3+y^4)\,dy$ دارای فاکتور انتگرال به شکل $\mu(x^\alpha y^\beta)$ است، آن را حل کنید.

حل: در اینجا $u = x^\alpha y^\beta$ که α و β را نمی‌دانیم. مطابق ۱۱.۱۲.۱ می‌بایستی کسر

$$-\frac{11y^4+13x^3}{x^\alpha y^\beta\left((\beta+3\alpha)x^3+(\alpha+2\beta)y^4\right)},$$

تابعی فقط از u باشد. این در صورتی ممکن است نسبت ضریب y^4 به ضریب x^3 در صورت با همین نسبت در مخرج برابر باشد. یعنی:

$$\begin{cases} \beta+3\alpha = 13a, \\ \alpha+2\beta = 11a, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 3a, \\ \beta = 4a, \end{cases}$$

که a عددی مخالف صفر است. در این صورت

$$\mu(u) = \exp\left(\frac{-1}{a}\int\frac{du}{u}\right) = u^{-a} = x^{-3a^2}y^{-4a^2}.$$

مثلاً به ازای $a=1$ به $\mu = 1/(x^3y^4)$ می‌رسیم. جواب $\mathscr{E}$ با توجه به اینکه صورت کامل شدهٔ آن:

$$\mathscr{E}_e : y\left(\frac{1}{y^4}+\frac{2}{x^3}\right)dx = x\left(\frac{3}{y^4}+\frac{1}{x^3}\right)dy,$$

است، عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{ x^3 = y^4 + Cx^2y^3 \;:\; C \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ x = 0 \right\} \cup \left\{ y = 0 \right\}.$$

۱۵.۱۲.۱. تمرینات در هر مورد، با علم به اینکه معادلهٔ داده شده فاکتور انتگرالی به شکل $\mu = \mu(u)$

است، آن را حل کنید:

1)	$(1-x^2y)\,dx + x^2(y-x)\,dy = 0,$	$u = x,$
2)	$(x^2+y)\,dx = x\,dy,$	$u = x,$
3)	$(x+y^2)\,dx = 2xy\,dy,$	$u = x,$
4)	$(2x^2y+2y+5)\,dx + (2x^3+2x)\,dy = 0,$	$u = x,$
5)	$(x^4\ln x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0,$	$u = x,$
6)	$\cos x\,dx + (y+\sin y+\sin x)\,dy = 0,$	$u = y,$
7)	$(2xy^2-3y^3)\,dx + (7-3xy^2)\,dy = 0,$	$u = y,$
8)	$xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0,$	$u = y,$
9)	$y(2x+y^3)\,dx = x(2x-y^3)\,dy,$	$u = y,$
10)	$e^x(x+1)\,dx + (ye^y - xe^x)\,dy = 0,$	$u = y,$
11)	$(y^3+xy^2+y)\,dx + (x^3+x^2y+x)\,dy = 0,$	$u = xy,$
12)	$3y\,dx - x\,dy = 0,$	$u = x/y,$
13)	$y(y+2x+1)\,dx = x(2y+x-1)\,dy = 0,$	$u = xy,$
14)	$(3y^2-x)\,dx + (2y^3-6xy)\,dy = 0,$	$u = x+y^2,$
15)	$(x^2+y^2+1)\,dx = 2xy\,dy,$	$u = y^2-x^2,$
16)	$x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0,$	$u = x+y^2,$
17)	$(y^2+y-x^2)\,dx + (x^2-y^2-x)\,dy = 0,$	$u = y^2-x^2,$
18)	$(x^4y^2-y)\,dx + (x^2y^4-x)\,dy = 0,$	$u = xy.$

بخش ۱۳.۱ معادلاتی که بر حسب y' حل نشده‌اند.

۱.۱۳.۱. تعریف این گونه معادلات به شکل یک چند جمله‌ای مرتبهٔ n ام بر حسب y' با ضرایب توابعی از x و y هستند:

$$\boxed{\mathscr{E} : (y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x,y)(y') + P_n(x,y) = 0.} \qquad (۳۲.۱)$$

۲.۱۳.۱. روش حل چنانچه معادله‌ای به شکل $\mathscr{E}$ در ۱.۱۳.۱ داده شده باشد، آن را به عنوان معادله‌ای بر حسب y' حل می‌کنیم. نتیجه یک یا چند معادلهٔ معمولی خواهد بود:

$$\mathscr{E}_1 : y' = F_1(x,y), \quad \cdots, \quad \mathscr{E}_k : y' = F_k(x,y).$$

اکنون کافی است هر یک از معادلات حاصل را حل و سپس جوابهای آنها را با هم اجتماع کرد.

۳.۱۳.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : yy'^2 + (x-y)y' - x = 0$ را حل کنید.

حل: این معادله بر حسب y' یک چند جمله‌ای مرتبهٔ دوم است. در نتیجه:

$$y' = \frac{-(x-y) \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}}{2y} = \frac{y - x \pm (x+y)}{2y},$$

که دو معادله حاصل می‌گردد:

$$\mathscr{E}_1 : y' = 1, \qquad \mathscr{E}_2 : y' = -\frac{x}{y}.$$

هر یک از آنها را حل می‌کنیم:

$$\mathscr{S}_1 : y = C_1 + x, \qquad \mathscr{S}_2 : x^2 + y^2 = C_2.$$

پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \\ &= \{y = x + C \,:\, C \in \mathbb{R}\} \cup \{x^2 + y^2 = C \,:\, C > 0\} \cup \{(0,0)\}, \end{aligned}$$

که $(0,0)$ نظیر فرض $y = 0$ است.

۴.۱۳.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : yy'^3 - x^2y'^2 - xy^2y' + x^3y = 0$ را حل کنید.

حل: این معادلهٔ درجه ۳ بر حسب y' را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$(yy' - x^2)(y'^2 - xy) = 0,$$

که به سه معادله به شرح زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathscr{E}_1 : yy' = x^2, \qquad \mathscr{E}_2 : y' = \sqrt{xy}, \qquad \mathscr{E}_3 : y' = -\sqrt{xy},$$

که هر سه تفکیک پذیرند. آنها را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_1 &= \{3y^2 = 2x^3 + C \,:\, C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = 0\}, \\ \mathscr{S}_2 &= \left\{y = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + C\right)^{1/2} \,:\, x > 0, y > 0, C \in \mathbb{R}\right\} \\ &\quad \cup \left\{y = -\left(\frac{1}{3}(-x)^{3/2} + C\right)^{1/2} \,:\, x < 0, y < 0, C \in \mathbb{R}\right\}, \\ \mathscr{S}_3 &= \left\{y = \left(-\frac{1}{3}x^{3/2} + C\right)^{1/2} \,:\, x > 0, y > 0, C \in \mathbb{R}\right\} \\ &\quad \cup \left\{y = -\left(-\frac{1}{3}(-x)^{3/2} + C\right)^{1/2} \,:\, x < 0, y < 0, C \in \mathbb{R}\right\}; \end{aligned}$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از اجتماع این سه مجموعه: $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3$. توجه شود که $\mathscr{S}_2$ و $\mathscr{S}_3$ تنها در ربع اول و سوم وجود دارند.

۵.۱۳.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y'^3 - xyy' + x^2y' = xy'$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y' = p$. با تجزیهٔ معادلهٔ $\mathscr{E}$ ملاحظه می‌گردد که

$$(p - xy)(p^2y - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{E}_1 : p = xy \text{ و } \mathscr{E}_2 : x = p^2y$$

معادلهٔ ε_1 به معنی $y' = xy$ که معادله‌ای تفکیک پذیر است؛ جواب عمومی این معادله عبارتست از

$$\mathscr{S}_1 : y = Ae^x, \quad A \in \mathbb{R}.$$

اما از دیفرانسیل گیری از طرفین معادلهٔ $\mathscr{E}_2$ نتیجه می‌گیریم:

$$dx = 2py\,dy + p^2\,dy.$$

اما مطابق فرض $dx = \frac{dy}{p}$، در نتیجه:

$$(1-p^3)\,dy = 2p^2y\,dp,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. جواب این معادله نیز عبارتست از

$$\mathscr{S}_2 = \left\{(x,y) : y = C(1-p^3)^{-2/3}, x = p^2y, C \neq 0\right\} \cup \left\{x = y\right\},$$

که خط $x = y$ به $p = 1$ نظیر است. بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ داده شده $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2\\ &= \left\{y = Ae^x : A \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{x = y\right\} \cup \left\{(x,y) : y = C(1-p^3)^{-2/3}, x = p^2y, C \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

۶.۱۳.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

1) $4y'^2 = 9x,$	2) $y'^2 = 2yy' + y^2(e^{2x}-1),$
3) $y'^2 = 2xy' + 8x^2,$	4) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0,$
5) $y'^2 + x^2 + xy = (2x+y)y',$	6) $y'^2 + (x+2)e^y = 0,$
7) $y'^3 + x^2y' = yy'^2 + x^2y,$	8) $y'^2 + e^x = yy',$
9) $y' - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0,$	10) $y'^4 = y^4x^4.$

بخش ۱۴.۱ معادلات به شکل $f(y,y')=0$ یا $f(x,y')=0$

برای حل معادلات به شکل $f(y,y')=0$ یا $f(x,y')=0$ از متغیر جدید $\boxed{y' = p}$ استفاده کرده و x و y را به عنوان توابعی از p بیان می‌کنیم. مثلاً اگر $\mathscr{E} : f(y,y') = 0$ باشد، با فرض $y' = p$ داریم $f(y,p) = 0$. این معادله را بر حسب y حل کرده و بدست می‌آوریم $y = \phi(p)$. اکنون از طرفین دیفرانسیل گرفته و نتیجه می‌گیریم $dy = \phi'(p)\,dp$. اما مطابق فرض $dy = p\,dx$، بنابراین

$$p\,dx = \phi'(p)\,dp,$$

معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر بر حسب x و p است و با حل آن x را بر حسب p تعیین می‌کنیم: $x = \psi(p)$. به این ترتیب جواب ε به صورت پارامتری بدست آمده است:

$$\boxed{\mathscr{S} \;:\; x = \psi(p), \quad y = \phi(p).} \qquad (۳۳.۱)$$

۱.۱۴.۱. مثال معادلهٔ $2y'^2 = x^2 + 2xy' + 2y$ را حل کنید.

حل: ابتدا این معادله را بر حسب y حل می‌کنیم:

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

با فرض $y'=p$ نتیجه می‌گیریم که

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \tag{۳۴.۱}$$

با دیفرانسیل گیری از رابطهٔ (۳۴.۱) نتیجه می‌شود:

$$dy = (2p-x)\,dp + (x-p)\,dx.$$

اما $dy = p\,dx$ (زیرا $p = y' = dy/dx$) بنابراین:

$$p\,dx = (2p-x)\,dp + (x-p)\,dx \qquad (2p-x)(dp-dx) = 0.$$

پس یا $x = 2p$ یا $dp = dx$ و در نتیجه $x = p + C$. بنابراین، در مجموع جواب عمومی معادلهٔ داده شده عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \left\{(x,y) : x = 2p, y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}\right\} \cup \left\{(x,y) : x = p + C, y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}\right\} \\ &= \left\{y = x^2/4\right\} \cup \left\{y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2} \ : C \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

۲.۱۴.۱. مثال در صورتی که a و b اعداد ثابت باشند، معادله دیفرانسیل $y = ay'^2 + by'^3$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y' = p$، در نتیجه:

$$y = ap^2 + bp^3 \tag{۳۵.۱}$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین (۳۵.۱) داریم:

$$dy = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp.$$

از طرفی $dy = p\,dx$، در نتیجه:

$$p\,dx = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp.$$

پس یا $p = 0$ و لذا از معادله داریم $y = 0$ و یا اینکه $p \neq 0$ و بنابراین:

$$dx = (2a + 3bp)\,dp,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. آن را برای یافتن x حل می‌کنیم:

$$x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C.$$

بنابراین: در مجموع جواب عمومی ε عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{(x,y) \ : \ x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C, y = ap^2 + bp^3, C \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{y = 0\right\}.$$

۳.۱۴.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: y=\arcsin y' + \ln(1+y'^2)$ را حل کنید.

حل: با فرض $y'=p$ داریم:

$$y=\arcsin p+\ln(1+p^2).$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین، داریم:

$$dy=\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}+\frac{2p}{1+p^2}\,dp. \tag{۳۶.۱}$$

اما $dy=p\,dx$، بنابراین:

$$dx=\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}}+\frac{dp}{1+p^2}, \tag{۳۷.۱}$$

و با انتگرال گیری از طرفین این رابطه، داریم:

$$x=\int\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}}+\arctan p+C.$$

با فرض $u=\sqrt{1-p^2}$ داریم:

$$\int\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}}=\int\frac{du}{(1-u^2)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C.$$

پس:

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{1+\sqrt{1-p^2}}\right|+\arctan p+C.$$

اما در (۳۶.۱) فرض شده است $p^2\neq 1$ و در (۳۷.۱) فرض شده است $p\neq 0$. این حالتها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} p=1\\ p=-1\\ p=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=1\\ y'=-1\\ y'=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=x+C\\ y=-x+C\\ y=C\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+C=\frac{\pi}{2}+\ln 2\\ -x+C=-\frac{\pi}{2}+2\\ C=0\end{array}\right.$$

که تنها حالت $y=0$ از این سه حالت می‌تواند جواب $\mathscr{E}$ باشد. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S} \;=\; &\Big\{(x,y)\,:\,x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{1+\sqrt{1-p^2}}\right)+\arctan p+C,\\ &\qquad y=\arcsin p+\ln(1+p^2),C\in\mathbb{R}\Big\}\cup\{y=0\}\end{aligned}$$

۴.۱۴.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: x=3y'-2y'^2$ را حل کنید.

حل: با فرض $y'=p$ داریم:

$$x=3p-2p^2. \tag{۳۸.۱}$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین (۳۸.۱) داریم:

$$dx=(3-4p)\,dp.$$

اما $dx=dy/p$، و در نتیجه:

$$dy=p(3-4p)\,dp, \tag{۳۹.۱}$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. بنابراین

$$y=\frac{3}{2}p^2-\frac{4}{3}p^3+C.$$

اما در (۳۹.۱) فرض شده است $p\neq 0$. حالت $p=0$ به معنی $y'=0$ یا $y=C$ است. با توجه به معادلهٔ $\mathscr{E}$ داریم که اگر $p=0$ آنگاه $x=0$. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از (۳۸.۱)، (۳۹.۱) و همهٔ نقاط به شکل $(0,C)$:

$$S=\left\{(x,y)\,:\,x=3p-2p^2,y=\frac{3}{2}p^2-\frac{4}{3}p^2+C\right\}.$$

۵.۱۴.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E}: x^{3/2}+y'^{2/3}=1$ را حل کنید.

حل: با فرض $y'=p$ داریم $x^{2/3}+p^{2/3}=1$. اکنون با فرض $x=\cos^3 t$ و $p=\sin^3 t$ ملاحظه می‌شود که رابطهٔ $\mathscr{E}$ برقرار است. با دیفرانسیل گیری از اولین رابطه، نتیجه می‌گیریم:

$$dx=-3\sin t\cos^2 t dt.$$

اما $dx=dy/p$، بنابراین

$$dy=-3\sin t\cos^2 t dt.$$

اما $p=\sin^3 t$، در نتیجه

$$\begin{aligned}
dy &= -3\sin^2 t\cos^2 t dt,\\
y &= -3\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\
&= -\frac{3}{8}\int\{1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\}dt\\
&= -\frac{3}{8}\int\left\{1-\cos 2t-\frac{1-\cos 4t}{2}+(1-\sin^2 2t)\cos 2t\right\}dt\\
&= -\frac{3}{8}\left\{t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\sin 4t+\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{\sin^3 2t}{3}\right\}+C.
\end{aligned}$$

پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}=\left\{(x,y)\,:\,x=\cos^3 t,y=-\frac{3}{64}(4t+\sin 4t)+\frac{1}{8}\sin^2 2t+C\right\}\cup\left\{(1,C)\,:\,C\in\mathbb{R}\right\}.$$

حالت $p=0$ به معنی $x^{3/2}+0=1$ یا $x=1$ است. نقاط $(1,C)$ به این منظور افزوده شده‌اند.

۶.۱۴.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید.

1)	$y = y'^2 e^{y^2},$	2)	$xy'^2 = e^{1/y^2},$
3)	$y' = e^{y'/y},$	4)	$x(1+y'^2)^{3/2} = a,$
5)	$x = \ln y' + \sin y',$	6)	$y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5},$
7)	$x = y'^2 + 2,$	8)	$x = y' + 4y',$
9)	$y = y' \ln y,$	10)	$y = y'(1 + y' \cos y'),$
11)	$x + y' = y'^2 + y'^3,$	12)	$y = (y'-1)e^{y'}.$

بخش ۱۵.۱ معادلهٔ لاگرانژ و کلرو

۱.۱۵.۱. تعریف معادله دیفرانسیل به شکل:

$$\boxed{y = x\phi(y') + \psi(y'),} \tag{۴۰.۱}$$

که $\phi(y') \neq y'$ رامعادلهٔ لاگرانژ می‌نامیم. اگر $\phi(y') = y'$، یعنی

$$\boxed{y = xy' + \psi(y'),} \tag{۴۱.۱}$$

معادلهٔ حاصل را، معادلهٔ کلرو می‌نامند.

۲.۱۵.۱. روش حل برای حل چنین معادلاتی فرض می‌کنیم $y' = p$، از طرفین دیفرانسیل گرفته و از فرض $dy = p\,dx$ استفاده می‌کنیم.

۳.۱۵.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y = 2xy' + \ln y'$ را حل کنید.

حل: با فرض $y' = p$ داریم:

$$y = 2xp + \ln p.$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین، نتیجه می‌گیریم:

$$dy = 2x\,dp + 2p\,dx + \frac{dp}{p}.$$

اما $dy = p\,dx$، در نتیجه:

$$2x\,dp + p\,dx + \frac{dp}{p} = 0,$$

که یک معادله مرتبه اول بر حسب x است:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2}.$$

آن را حل کرده و x را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} h &= \exp\left(\int \frac{2}{p}\,dp\right) = \exp(2\ln p) = p^2, \\ x &= \frac{1}{p^2}\left(\int p^2 \frac{-1}{p^2}\,dp + C\right) \\ &= \frac{1}{p^2}(C-p) = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \Big\{(x.y) \,:\, x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, y = 2xp + \ln p, C \in \mathbb{R}\Big\}.$$

۴.۱۵.۱. مثال معادلهٔ $\mathscr{E} : y = xy'^2 - 1/y'$ را حل کنید.

حل: با فرض $y' = p$، داریم $y = xp^2 - 1/p$. با دیفرانسیل گیری از طرفین این رابطه، نتیجه می‌گیریم:

$$dy = p^2\, dx + 2xp\, dp + \frac{dp}{p^2}.$$

اما $dy = p\, dx$ و در نتیجه، به معادلهٔ خطی مرتبه اول:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1} x = \frac{1}{p^2(p^2-1)}, \tag{۴۲.۱}$$

می‌رسیم. از حل آن، x را بر حسب p می‌یابیم:

$$\begin{aligned} h &= \exp\Big(\int \frac{2}{p-1}\, dp\Big) = (p-1)^2, \\ x &= \frac{1}{(p-1)^2}\Big(\int (p-1)^2 \frac{dp}{p^2(p^2-p)} + C\Big) \\ &= \frac{1}{(p-1)^2}\Big(\int \frac{p-1}{p^3}\, dp + C\Big) \\ &= \frac{1}{(p-1)^2}\Big(-\frac{1}{P} + \frac{2}{p^2} + C\Big). \end{aligned}$$

اما در (۴۲.۱) فرض شده است $p \neq 1$. حالت $p = 1$ معادل $y = x$ است که در معادلهٔ دیفرانسیل داده شده صدق نمی‌کند. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \Big\{(x,y) \,:\, x = \frac{Cp^2 + 2 - p}{p^2(p-1)^2}, y = xp^2 - \frac{1}{p}, C \in \mathbb{R}\Big\}.$$

۵.۱۵.۱. مثال معادلهٔ $y = xy' + a/(2y')$ را حل کنید.

حل: با فرض $y = xp + a/2p$ که از $y' = p$ حاصل می‌شود و دیفرانسیل گیری از دو طرف تساوی، نتیجه می‌گیریم:

$$dy = p\, dx + x\, dp - \frac{a}{2p}\, dp.$$

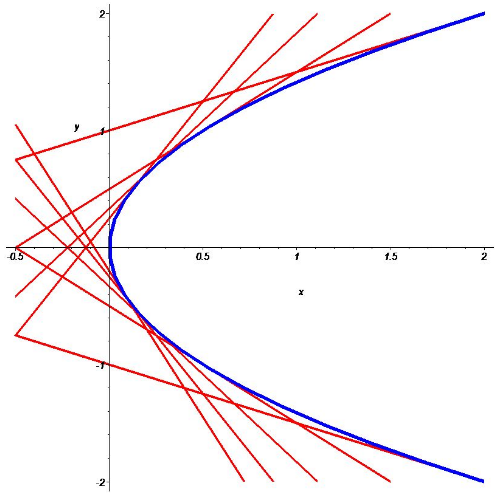
اما $dy = p\, dx$ و در نتیجه

$$\Big(x - \frac{a}{2p^2}\Big)\, dp = 0.$$

پس یا $dp = 0$ و لذا p ثابت است و بنابراین $y = Cx + a/2C$ و یا اینکه $x - \frac{a}{2p^2} = 0$ یا $x = a/2p^2$.
پس جواب عمومی معادله داده شده برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \left\{(x,y)\,:\, x = \frac{a}{2p^2}, y = xp + \frac{a}{2p}\right\} \cup \left\{y = Cx + \frac{a}{2C}\,:\, C \neq 0\right\}\\ &= \left\{y^2 = 2ax\right\} \cup \left\{y = Cx + \frac{a}{2C}\,:\, C \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که $\mathscr{S}$ اجتماع یک منحنی (سهمی) $y^2 = 2ax$ و مجموعه‌ای از خطوط است: $y = Cx + a/2C$. چنانچه منحنی و خطوط مذکور را ترسیم کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که خطوط مذکور به منحنی نمی‌رسند. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که منحنی $y^2 = 2ax$ پوش دسته خطوط $y = Cx + a/2C$ است. به شکل زیر توجه شود. [۵]



جوابهای معادله دیفرانسیل $y = xy' + a/(2y')$ با $a = 1$.

۱.۱۵.۶. مثال معادله دیفرانسیل $\mathscr{E} : y = xy' + y'^3$ را حل کنید.

حل: با فرض $p = y'$ داریم $y = xp + p^3$. اما با دیفرانسیل گیری از طرفین این رابطه داریم

$$dy = p\,dx + x\,dp + 3p^2\,dp.$$

با قرار دادن $dy = p\,dx$، نتیجه می‌گیریم $(x + 3p^2)\,dp = 0$. پس یا $dp = 0$ و لذا $p = C$ ثابت است و بنابراین $y = Cx + C^3$؛ و یا اینکه $x + 3p^2 = 0$ و بنابراین $x = -3p^2$. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \left\{(x,y)\,:\, x = -3p^2, y = xp + p^3\right\} \cup \left\{y = Cx + C^3\,:\, C \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{y = \frac{3}{2}x\,:\, x \leq 0\right\} \cup \left\{y = Cx + C^3\,:\, C \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

[۵] توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
> a:=plots[implicitplot]({y∧2 = 2*x}, x = -1/2.. 4, y = -2.. 2, color = blue, thickness = 6):
> b:=plots[implicitplot]({y = -2*x - 1/4, y = -x - 1/2, y = x + 1/2, y = 2*x + 1/4, y = -2.5*x -.2, y = -1.5*x -.3, y = -.5*x - 1, y =.5*x + 1, y = 1.5*x +.3}, x = -1/2.. 4, y = -2.. 2, color = red, thickness = 4, grid = [50, 50]):
> plots[display](a,b);
```

۷.۱۵.۱. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1)	$y = 2xy^2 + y'\ln y'$,	2)	$y = xy' + a/y'^2$,
3)	$y = x(1+y') + y'^2$,	4)	$y = xy' + y'^2$,
5)	$y = 2xy' + \sin y'$,	6)	$xy' + 1 = yy' + y'$,
7)	$y = xy'^2 - 1/y'$,	8)	$y = xy' + a\sqrt{1+y'^2}$,
9)	$y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$,	10)	$xy'^2 = yy' + 1$.

بخش ۱۶.۱ ساختن معادله دیفرانسیل با داشتن خانواده‌ای از جوابهای آن

فرض کنید خانواده‌ای از منحنی‌ها در صفحه داریم که توسط یک پارامتر a بیان شده است:

$$C : F(x,y,a) = 0.$$

از معادلهٔ داده شده به کمک قاعدهٔ مشتق تابع ضمنی، y' را می‌یابیم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

سپس از دستگاه معادلات:

$$\boxed{F(x,y,a) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0,} \tag{۴۳.۱}$$

پارامتر a را حذف می‌کنیم. معادلهٔ حاصل همان معادله دیفرانسیل مورد نظر است.

۱.۱۶.۱. مثال معادله دیفرانسیل نظیر به خانوادهٔ $\frac{x^2}{a^2} = y^2 + 1$ را بیابید.

حل: از معادلهٔ داده شده y' را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2/a^2 - y^2 - 1)}{\frac{\partial}{\partial y}(x^2/a^2 - y^2 - 1)} \\ &= -\frac{2x/a^2}{-2y} = \frac{x}{a^2 y}. \end{aligned}$$

بنابراین، چون بنا به فرض $a^2 = \frac{x^2}{y^2+1}$، داریم:

$$\frac{x^2}{y^2+1}y' = \frac{x}{y} = \frac{y^2+1}{xy}.$$

۲.۱۶.۱. مثال معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y^2 = 2Cx + C^2$ را پیدا کنید.

حل: از فرض $y^2 = 2Cx + C^2$ نتیجه می‌گیریم:

$$y' = -\frac{-2C}{2y} = \frac{C}{y}.$$

اما در این صورت $C = yy'$ و در نتیجه:

$$y^2 = 2xyy' + y^2y'^2.$$

اگر در این معادله فرض کنیم $y' = p$، خواهیم داشت $y^2 = 2xyp + y^2p^2$، در نتیجه:

$$\mathscr{E} : y = 2xy' + yy'^2.$$

۳.۱۶.۱. مثال معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = C\cos x + x$ را پیدا کنید.

حل: با مشتق گیری از طرفین این رابطه، داریم $y' = -C\sin x + 1$. از معادلهٔ $y = C\cos x + x$ نتیجه می‌گردد که $C = \frac{1}{\cos x}(y - x)$. بنابراین $y' = -\tan x(y - x) + 1$، که یک معادله خطی مرتبه اول است:

$$y' + \tan xy = 1 + x\tan x.$$

۴.۱۶.۱. تمرینات در هر مورد معادله دیفرانسیلی بیابید که خانواده منحنی‌های داده شده در آن صدق کند:

1) $y = \frac{a}{x}$,	2) $y = ax + a^2$,	3) $x^2 - y^2 = ax$,
4) $y = \frac{a}{x} + \frac{x}{a}$,	5) $y = ae^{x/a}$,	6) $y = Cx + C^2$,
7) $y = Cx - C - C^2$,	8) $y^2 = Cx + C^3$,	9) $y = a + axe^{-x}$,
10) $y = xy^2 + Cx$,	11) $x^2 + y^2 = C$,	12) $y = x^3 + \frac{C}{x}$.

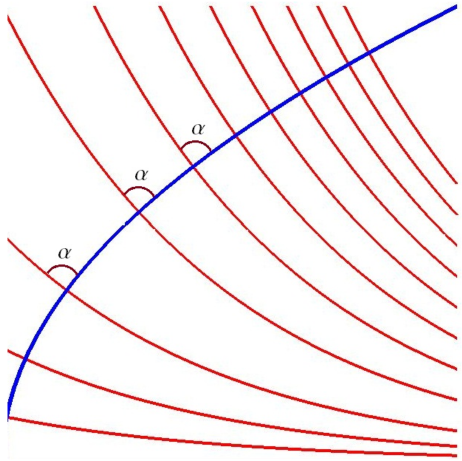
در این مسایل a و C پارامتر دلخواهند.

بخش ۱۷.۱ مسیرهای متعامد و همزاویه

۱.۱۷.۱. تعریف فرض کنید

$$\boxed{C : F(x, y, a) = 0,} \qquad (۴۴.۱)$$

خانواده‌ای از منحنی‌های در صفحه است. منحنی $y = f(x)$ را در صورتی یک مسیر همزاویهٔ خانوادهٔ C گوییم که اگر $y = \phi(x)$ عضوی از C باشد و منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = \phi(x)$ در x_0 متقاطع باشند، آنگاه زاویهٔ بین آنها برابر عدد ثابت α باشد. چنانچه $\alpha = \pi/2$، مسیر $y = f(x)$ را یک مسیر متعامد برای $\mathscr{E}$ می‌نامند.



برای یافتن مسیرهای متعامد یک معادله دیفرانسیل مفروض، ابتدا معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که C جواب آن باشد. سپس توجه می‌کنیم که اگر C_1 و C_2 دو منحنی با شیب m_1 و m_2 باشند، آنگاه زاویهٔ بین آنها برابر است با

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2},$$

از طرفی اگر $y = y(x)$ یک منحنی باشد، در این صورت شیب خط مماس بر آن برابر $y'(x)$ است. پس اگر y_1 و y_2 به ترتیب C_1 و C_2 را معرفی کنند، بایستی داشته باشیم:

$$\tan\alpha = \frac{y_1' - y_2'}{1 + y_1' y_2'},$$

اکنون کافی است از معادله دیفرانسیل حاصل y' را بر حسب x و y پیدا کنیم، مثلاً $y' = f(x,y)$ و سپس معادلهٔ زیر را تشکیل دهیم:

$$\boxed{\mathscr{E}' : \tan\alpha = \frac{y' - f(x,y)}{1 + y' f(x,y)}.} \tag{۴۵.۱}$$

در حالت مسیرهای متعامد، معادلهٔ $\mathscr{E}$ به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\boxed{\mathscr{E}'' : y' = -\frac{1}{f(x,y)}.} \tag{۴۶.۱}$$

۲.۱۷.۱. مثال مسیرهای متعامد نسبت به دسته خطوط $y = Cx$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل دسته خطوط داده شده را پیدا می‌کنیم:

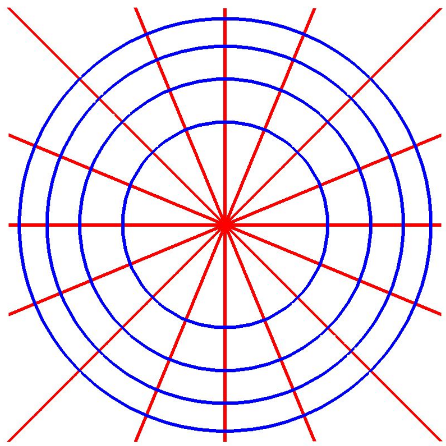
$$\begin{cases} y = Cx \\ y' = C \end{cases} \Longrightarrow \mathscr{E} : y' = \frac{y}{x}.$$

پس معادلهٔ $\mathscr{E}''$ در (۴۶.۱) را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathscr{E}'' : y' = -\frac{1}{y/x} = -\frac{x}{y},$$

که یک معادلهٔ تفکیک پذیر است؛ پس معادلهٔ مسیرهای خواسته شده عبارتست از

$$\mathscr{S} : x^2 + y^2 = C.$$



۳.۱۷.۱. مثال مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی $y^2 = Cx + x^2$ زاویهٔ ثابت $\pi/3$ می‌سازند.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که این دسته منحنی‌ها در آن صدق کنند:

$$\begin{cases} 2yy' = C + x^2, \\ C = (y^2 - x^2)/x, \end{cases} \implies 2yy' = \frac{y^2 - x^2}{x} + x^2.$$

به این ترتیب $\mathscr{E} : y' = \dfrac{y^2 - x^2 + x^3}{2xy}$. چون $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$، پس معادلهٔ $\mathscr{E}$ چنین می‌شود:

$$\sqrt{3} = \frac{y' - \frac{y^2 - x^2 + x^3}{2xy}}{1 + y'\frac{y^2 - x^2 + x^3}{2xy}} = \frac{2xyy' - y^2 + x^2 - x^3}{2xy + y^2y' - x^2y' + x^3y'}.$$

و در نتیجه

$$\mathscr{E}' : y' = \frac{y^2 + x^3 + 2\sqrt{3}xy - x^2}{2xy + \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 - \sqrt{3}x^3}.$$

۴.۱۷.۱. مثال مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی‌های $x^2 + y^3 = C$ زاویه ثابت $\pi/4$ تشکیل می‌دهند.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیلی را می‌یابیم که این دسته منحنی در آن صدق می‌کنند: $\mathscr{E} : 2x + 3y'y^2 = 0$.
اکنون با توجه به اینکه $\tan(\pi/4) = 1$ معادلهٔ $\mathscr{E}$ از (۴۵.۱) را تشکیل می‌دهیم:

$$1 = \frac{y' - \left(\frac{-2x}{3y^2}\right)}{1 + y'\left(\frac{-2x}{3y^2}\right)} = \frac{3y^2y' + 2x}{3y^2 - 2xy'}.$$

بنابراین، معادلهٔ خواسته شده عبارتست از

$$\mathscr{E}' : y' = \frac{3y^2 - 2x}{3y^2 + 2x}.$$

۵.۱۷.۱. مثال مسیرهای متعامد نسبت به دوایر $x^2+y^2=2ax$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل این دسته منحنی‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x+2yy'=2a, \\ x^2+y^2=2ax, \end{cases} \Longrightarrow 2x+2yy'=\frac{x^2+y^2}{x}.$$

در نتیجه، به معادله دیفرانسیل $\mathscr{E}: 2yy'=y^2-x^2$ می‌رسیم. اکنون بجای y' از $-1/y'$ استفاده کرده و معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد می‌رسیم:

$$\mathscr{E}'': y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

که یک معادلهٔ همگن است. جواب این معادله عبارتست از دسته دایره‌های $x^2+y^2=Cy$.

۶.۱۷.۱. تمرینات

۱) مسیرهایی را بیابید که با دسته خطوط $y=C^2x+C$ زاویهٔ ثابت $\pi/6$ می‌سازند.

۲) مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی‌های $Cx=x^2+y^2$ زاویهٔ ثابت $\pi/4$ می‌سازند.

۳) مسیرهایی را بیابید که با دسته منحنی‌های $xy=Cx+1$ زاویهٔ ثابت $\pi/3$ می‌سازند.

در هر مورد، مسیرهای متعامد نسبت به دسته منحنی‌های داده شده را بیابید:

4)	$y^2+2ax=0,\ a>0$	5)	$x^2+y^2=2ay,$
6)	$y=ax^n,$ ثابت $n,$	7)	$x^2+y^2/3=C,$
8)	$x^2-y^2/2=C^2,$	9)	$y=a(1+\cos x),$
10)	$x^n+y^n=C,$ ثابت $n,$	11)	$y^2=4(x-a).$

بخش ۱۸.۱ جوابهای تکین یک معادله دیفرانسیل

۱.۱۸.۱. تعریف فرض کنید معادله دیفرانسیل:

$$\mathscr{E}: F(x,y,y')=0,$$

داده شده است. جواب $C: f(x,y)=0$ از $\mathscr{E}$ را در صورتی یک جواب تکین گوییم که در همهٔ نقاط آن جواب $\mathscr{E}$ منحصر بفرد نباشد. به بیان دیگر به ازای هر $(x_0,y_0)\in C$ برای C جوابی بجز C برای $\mathscr{E}$ یافت گردد که از همان نقطهٔ (x_0,y_0) بگذرد.

۲.۱۸.۱. تمرینات برای یافتن جوابهای تکین معادلهٔ $\mathscr{E}: F(x,y,y')=0$ (البته در صورت وجود) مشروط به اینکه $\partial F/\partial y$ و $\partial F/\partial y'$ در همهٔ نقاط پیوسته باشند، کافی است دستگاه معادلات:

$$\boxed{\mathscr{T}: F(x,y,y')=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')=0,} \tag{۴۷.۱}$$

را تشکیل داده و y' را بین آن دو حذف کنیم. نتیجه یک جواب تکین $\mathscr{E}$ خواهد بود.

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

۳.۱۸.۱. مثال جوابهای تکین معادلهٔ $\mathscr{E}: xy' + y'^2 = y$ را در صورت وجود بیابید.

حل: در این مسأله

$$F = xy' + y'^2 - y.$$

پس دستگاه معادلات $\mathscr{T}$ از (۴۷.۱) به صورت زیر است:

$$xy' + y'^2 - y = 0, \qquad x + 2y' - 0 = 0.$$

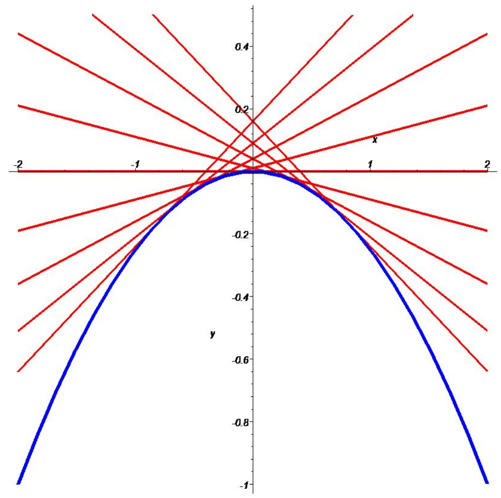
از معادلهٔ دوم داریم $y' = -x/2$ که اگر در معادلهٔ اول قرار دهیم، نتیجه می‌گردد:

$$x\left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 - y = 0.$$

یا $C: y = -x^2/4$. اما معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ کلرو است و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{y = Cx + C^2 \ : \ C \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{y = -\frac{1}{4}x^2\right\}.$$

ملاحظه می‌شود که دسته خطوط $y = Cx + C^2$ به ازای هر C ای بر منحنی $y = -x^2/4$ مماس هستند. در واقع در $(x_0, y_0) \in C$ خط $y = -\frac{x_0}{2}x + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2$ به C مماس است. یعنی، در آن نقطه علاوه بر C خط مورد نظر هم یک جواب مسأله است. به شکل زیر توجه شود.[۶]



منحنی $y = -x^2/4$ که پوش خانواده خطوط $y = C + C^2x$ با $C \in \mathbb{R}$ است.

[۶] توضیح اینکه، در ترسیم این شکل از دستور ذیل در محیط Maple ۱۵ استفاده شده است:

```
> a:=plots[implicitplot]({y = -x∧2/4}, x = -2..2, y = -1..1/2, color = blue, thickness = 6):
> b:=plots[implicitplot]({y = 0, y = 0.1*x + 0.01, y = -0.1*x + 0.01, y = 0.2*x + 0.04, y = -0.2*x + 0.04, y = 0.3*x + 0.09, y = -0.3*x + 0.09, y = 0.4*x + 0.16, y = -0.4*x + 0.16}, x = -2..2, y = -1..1/2, color = red, thickness = 4):
> plots[display](a,b);
```

۴.۱۸.۱. مثال جوابهای تکین معادله دیفرانسیل $\mathscr{E} : xy'^2 + 4x = 2yy'$ را در صورت وجود بیابید.

حل: این یک معادلهٔ لاگرانژ است و جواب عمومی آن $x^2 = C(y-C)$ است. در این مسأله

$$F = xy'^2 + 4x - 2yy'.$$

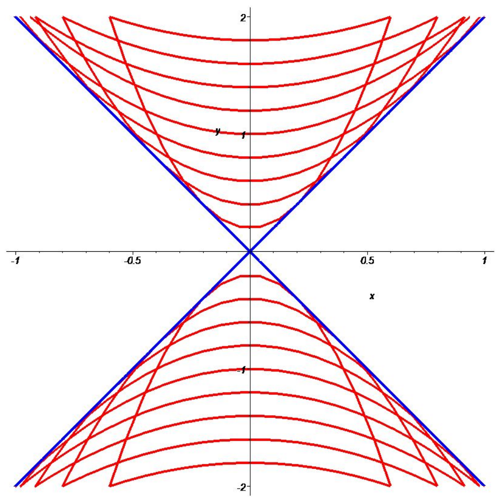
پس دستگاه $\mathscr{T}$ در (۴۷.۱) عبارت است از

$$xy'^2 + 4x - 2yy' = 0, \qquad 2xy' - 2y = 0.$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌گیریم $y' = y/x$، که اگر در معادلهٔ اول قرار دهیم، بدست خواهیم آورد که

$$x\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4x - 2y\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

یا به اختصار $4x^2 = y^3$ که اجتماع دو خط $y = \pm 2x$ است. به شکل زیر توجه شود:



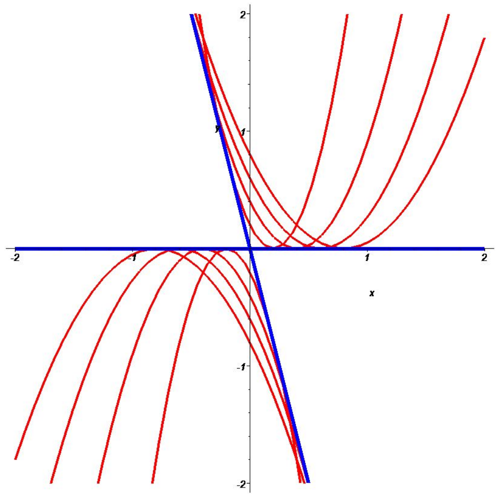
خطوط راست $y = \pm 2x$ که پوش خانواده منحنیهای $x^2 = C(y-C)$ با $C \in \mathbb{R}$ هستند.

۵.۱۸.۱. مثال جوابهای تکین معادلهٔ $\mathscr{E} : 2y(y'+2) = xy'^2$ را در صورت وجود بیابید.

حل: جواب عمومی این معادله $Cy = (C-x)^2$ با $C \in \mathbb{R}$ می باشد. در این مسأله $F = 2y(y'+2) - xy'^2$، پس دستگاه $\mathscr{T}$ از (۴۷.۱) چنین است:

$$2yy' + 4y - xy'^2 = 0, \qquad 2y - 2xy' = 0.$$

از معادلهٔ دوم داریم $y' = y/x$ که اگر در معادلهٔ اول قرار دهیم، نتیجه می‌شود $y^2 + 4xy = 0$ که اجتماع دو خط $y = 0$ و $y = -4x$ می‌باشد. به شکل زیر توجه شود:



خطوط راست $y=0$ و $y=-4x$ که پوش خانواده منحنیهای $Cy=(x-C)^2$ با $C\in\mathbb{R}$ هستند.

۶.۱۸.۱. مثال جوابهای تکین معادلهٔ $\mathscr{E}: y'^2(2-3y)^2=4(1-y)$ را در صورت وجود بیابید.

حل: با حل معادله بر حسب y' به دو معادله دیفرانسیل

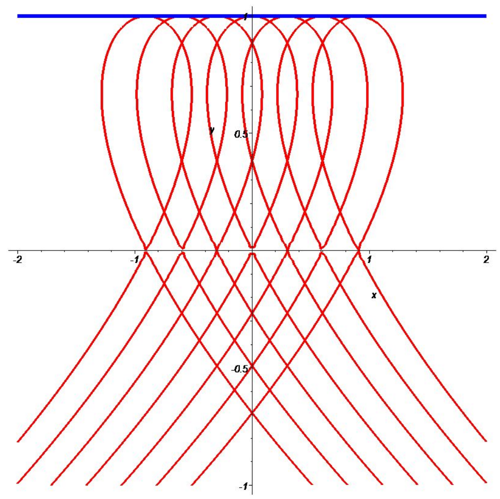
$$y'=\pm 2\frac{\sqrt{1-y}}{2-3y},$$

می‌رسیم؛ که هر دو تفکیک پذیر هستند. با حل آنها به جواب عمومی $y^2(1-y)=(x-C)^2$ می‌رسیم، که در آن $C\in\mathbb{R}$.

در این مسأله $F=y'^2(2-3y)^2-4\sqrt{1-y}$ و معادلات $\mathscr{T}$ از (۴۷.۱) عبارتند از

$$y'^2(2-3y)^2-4(1-y)=0, \qquad 2y'(2-3y)^2=0.$$

پس یا $2-3y=0$ و لذا $y=2/3$ که در معادله صدق نمی‌کند؛ و یا در غیر این صورت، باید $y'=0$، که اگر آن را در معادلهٔ اول قرار دهیم، به $4\sqrt{1-y}=0$ می‌رسیم. پس تنها جواب تکین $\mathscr{E}$ عبارت است از $y=1$. به شکل زیر توجه شود.



خط راست $y = 1$ که پوش خانواده منحنیهای $y^2(1-y) = (x-C)^2$ با $C \in \mathbb{R}$ است.

۷.۱۸.۱. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید و جوابهای تکین آنها را مشخص کنید:

1) $(1+y'^2)y^2 = 4yy' + 4x,$	2) $y'^2 = y^2,$
3) $y'^2 = 4y,$	4) $y' = \sqrt[3]{y^2} + a,$
5) $y'^3 + 8y^2 = 4xyy',$	6) $(xy'+y)^2 + 3x^5(xy'-2y) = 0,$
7) $y(y-2xy')^2 = 2y',$	8) $8y'^3 = 27(y-x) + 12y'^2,$
9) $(y'-1)^2 = y^2,$	10) $(xy'+y)^2 = y'y^2,$
11) $y + \dfrac{x^2}{2} = y'^2 - xy',$	12) $3y + \dfrac{2}{x}y'^2 = 2xy',$
13) $y'^2 + e^x = yy',$	14) $3xy'^2 + x + 2y = 6yy',$
15) $y'^2(1-y)^2 = 2(1+y),$	16) $y = xy' + \sqrt{a^2y'^2 + b^2}.$

بخش ۱۹.۱ استفاده از میپل در بررسی معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۱۹.۱. ترسیم میدان جهتی برای یک معادله دیفرانسیل دستور کلی برای ترسیم میدان جهتی نظیر به یک معادله دیفرانسیل مفروض با استفاده از نرم افزار میپل چنین است:

```
DETools[dfieldplot]( ODE, y(x), x=a..b, y=c..d );
```

که در آن ODE معادله دیفرانسیل معمولی مورد نظر است، y(x) نام تابع مجهول به همراه نام متغیر آن x می‌باشد، x=a..b دامنه تغییرات متغیر x را از a تا b تعیین نموده، و y=c..d دامنه تغییرات y را از c تا d تعیین می‌نماید.

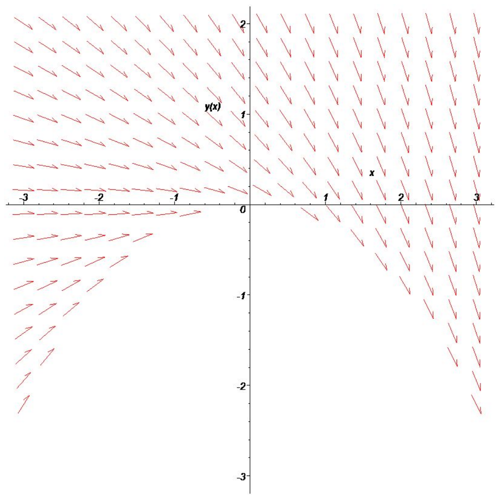
۲.۱۹.۱. مثال برای ترسیم میدان جهتی معادله دیفرانسیل

$$y' = -\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 + 4y(x)}\right)$$

بر مستطیل $D : -3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 2$ از دستور

```
DETools[dfieldplot]( diff(y(x),x)=1/2*(-x-(x^2+4*y(x))^(1/2)),
                     y(x), x=-3..3, y=-3..2 );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:



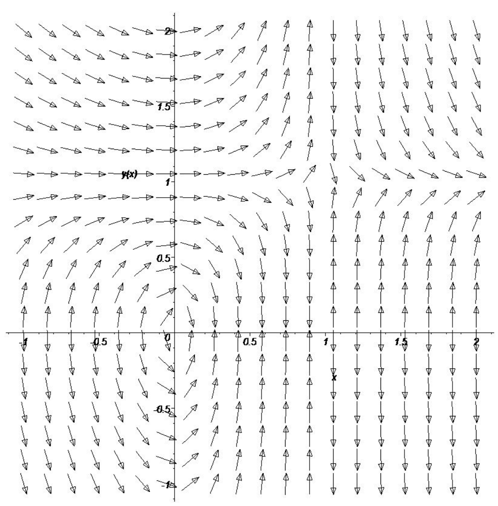
۳.۱۹.۱. مثال برای ترسیم میدان جهتی معادله دیفرانسیل

$$y'(x) = 0.3\,\frac{x(1-y(x))}{(x-1)y(x)}$$

بر مستطیل $D: -1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2$ از دستور

```
DETools[dfieldplot]( diff(y(x),x)=(x*(1-y(x)))/(0.3*y(x)*(x-1)), y(x),
                     x=-1..2, y=-1..2, arrows=SLIM, color=black);
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:



توضیح اینکه در اینجا با دستور color=black رنگ شکل حاصل سیاه انتخاب شده است و با دستور arrows=SLIM نوع پیکانهای مور استفاده در شکل تنظیم گردیده است.

۴.۱۹.۱. ترسیم برخی جوابهای یک معادله دیفرانسیل دستور کلی برای ترسیم برخی از جوابهای یک معادله دیفرانسیل مفروض با استفاده از نرم افزار میپل چنین است:

```
DETools[phaseportrait]( ODE, y(x), x=a..b, inits );
```

که در آن ODE معادله دیفرانسیل معمولی مورد نظر است، y(x) نام تابع مجهول به همراه نام متغیر آن x می‌باشد، x=a..b دامنه تغییرات متغیر x را از a تا b تعیین نموده، و inits مجموعه‌ای از شرایط آغازی برای جوابهای خصوصی مورد نظر می‌باشد.

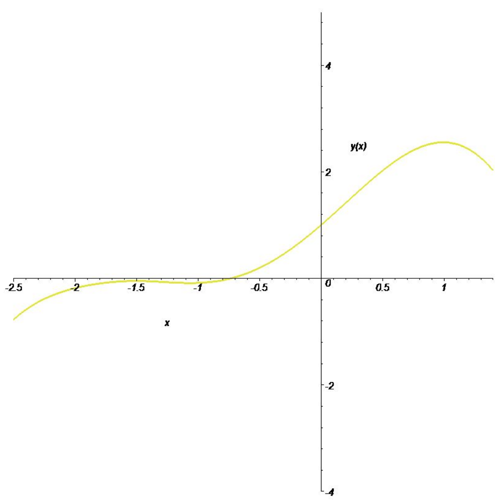
۵.۱۹.۱. مثال برای ترسیم جوابی از معادله دیفرانسیل

$$\cos x y''' - y'' + \pi y' = y - x$$

که در شرایط $y(0) = 1$، $y'(0) = 2$ و $y''(0) = 1$ صدق می‌کند، از دستور

```
DETools[phaseportrait]( cos(x)*diff(y(x),x$3) - diff(y(x),x$2) +
    Pi*diff(y(x),x) = y(x) - x, y(x), x=-2.5..1.4, [[ y(0)=1, D(y)(0)=2,
                        (D@@2)(y)(0)=1 ]], y=-4..5, stepsize=.05 );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:



توضیح اینکه در اینجا تغییرات متغیر x از -2.5 تا 1.4 تعیین گردیده است و مقدار تغییرات y از -4 تا 5 تنظیم شده است. بعلاوه، فاصله تغییرات جزئی لازم برای ترسیم نمودار با دستور stepsize=.05 باندازه $\Delta = 0.05$ واحد قرار داده شده است.

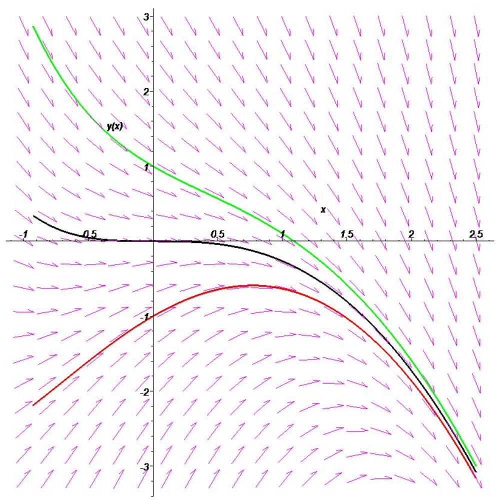
۶.۱۹.۱. مثال برای ترسیم جوابهایی از معادله دیفرانسیل

$$y' + y + x^2 = 0$$

که در شرایط $y(0) = 0$، $y(0) = 1$ و $y(0) = -1$ صدق می‌کنند، از دستور

```
phaseportrait( D(y)(x)=-y(x)-x^2, y(x), x=-1..2.5, [[ y(0)=0 ], [ y(0)=1 ],
    [ y(0)=-1 ]], colour=magenta, linecolor=[black, green, red ] );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:



توضیح اینکه رنگ پیکانها سرخابی magenta و رنگ نمودار جوابها بترتیب سیاه black، سبز green و قرمز red انتخاب شده‌اند.

۷.۱۹.۱. حل معادله دیفرانسیل دستور کلی حل یک معادله دیفرانسیل با استفاده از نرم افزار میپل چنین است:

```
dsolve( ODE, y(x) );
```

که در آن ODE معادله دیفرانسیل معمولی مورد نظر است و y(x) نام تابع مجهول به همراه نام متغیر آن x می‌باشد.

۸.۱۹.۱. مثال برای حل معادله دیفرانسیل

$$y'' - 2y' + y + 6xe^x = 0$$

از دستور

```
dsolve( diff(y(x),x,x) - 2*diff(y(x),x) + y(x) + 6*x*exp(x) , y(x));
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:

$$y(x) = \_C1\ xe^x + \_C2\ e^x - x^3 e^x$$

توضیح اینکه در جواب خروجی میپل، اسامی‌ای که با آندرلاین شروع می‌شوند، نظیر _C1، دلخواه هستند. یعنی در خروجی بالا، دو ثابت دلخواه _C1 و _C2 وجود دارد.

۹.۱۹.۱. مثال نمونه‌ای دیگر از این دستور چنین است:

```
dsolve(diff(y(t),t) - y(t)^2*sin(t) = 0 , y(t) );
```

که نتیجه چنین خواهد بود:

$$y(t) = (\cos(t) + \_C1) - 1$$

۱۰.۱۹.۱. حل مساله مقدار اولیه دستور کلی حل یک مساله مقدار اولیه معمولی با استفاده از نرم افزار میپل چنین است:

```
dsolve( { ODE, ICs }, y(x), options );
```

که در آن ODE یک معادله دیفرانسیل معمولی، ICs شرایط اولیه مساله و y(x) نام تابع مجهول به همراه نام متغیر آن x می‌باشد.

۱۱.۱۹.۱. مثال برای حل مساله با مقدار اولیه

$$y''(x) = 2y(x) + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

از دستور

```
dsolve( { diff(y(x),x,x)=2*y(x)+1, y(0)=1, D(y)(0)=0 }, y(x) );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{\sqrt{2}x} + \frac{3}{4}e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}$$

۱۲.۱۹.۱. مثال برای حل مساله با مقدار اولیه

$$y''(x) = 2y(x) + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

از دستور

```
dsolve( { x^3*diff(y(x),x$3) + 2*x^2*diff(y(x),x,x) - x*diff(y(x),x) = 0,
          y(1)=-1, D(y)(1)=1, (D@@2)(y)(1)=0 }, y(x) );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:

$$y(x) = -1 + \frac{1}{5}\sqrt{5}x^{(1+\sqrt{5})/2} - \frac{1}{5}\sqrt{5}x^{(1-\sqrt{5})/2}$$

۱۳.۱۹.۱. تغییر متغیر در معادله دیفرانسیل دستور کلی برای تغییر متغیر (و البته با تغییر تابع و یا بدون آن) در یک معادله دیفرانسیل معمولی با استفاده از نرم افزار میپل چنین است:

```
PDETools[dchange]( { x=X(t,s(t)), y=Y(t,s(t)) }, ODE );
```

که در آن ODE یک معادله دیفرانسیل معمولی مفروض است، و دستورات x=X(t،s(t))، y=Y(t،s(t)) تغییر متغیر را توضیح می‌دهند. در اینجا، متغیر جدید t، و تابع جدید s(t) فرض شده است.

۱۴.۱۹.۱ . مثال برای ایجاد تغییر متغیر $x = e^t$ و تغییر تابع $y = s(t)$، در معادله اولر

$$x^3\, y''(x) - x^2\, y(x) + x\, y(x) = y(x) - x$$

از دستور

```
PDETools[dchange]( { x=exp(t), y=s(t) }, x^3*diff(y(x),x$3)
            -x^2*diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)=y(x)-x );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه، یک معادله خطی با ضرایب ثابت خواهد بود:

$$s'''(t) - 4\, s''(t) + 4\, s'(t) - s(t) + e^t = 0.$$

۱۵.۱۹.۱ . مثال برای ایجاد تغییر متغیر $x = s(t) + t$ و تغییر تابع $y = s(t) - t$، در معادله

$$y'(x) = \frac{y(x)^3 + x\, y(x)^2 - x^2\, y(x) - x^3 + 8}{y(x)^3 + x\, y(x)^2 - x^2\, y(x) - x^3 - 8}$$

از دستور

```
PDETools[dchange]( { x=s(t)+t, y=s(t)-t }, diff(y(x),x) = (y(x)^3+
  x*y(x)^2-x^2*y(x)-x^3+8)/(y(x)^3+x*y(x)^2-x^2*y(x)-x^3-8) );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه، یک معادله تفکیک‌پذیر خواهد بود:

$$s'(t) = t\, s^2(t).$$

۱۶.۱۹.۱ . حل معادلات دیفرانسیل کامل دستور کلی برای حل یک معادله دیفرانسیل کامل با استفاده از نرم افزار میپل چنین است:

```
PDETools[firint]( ODE );
```

که در آن ODE یک معادله دیفرانسیل معمولی مفروض است.

۱۷.۱۹.۱ . مثال برای حل معادله کامل

$$x\,(x^2 + 3\, y^2)\, dy + y(y^2 + 3\, x^2)\, dx = 0$$

از دستور

```
PDETools[firint]( x*(x^2+3*y(x))*diff(y(x),x)+y(x)*(x^2+y(x)^2)=0 );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:

$$x\, y(x)\, (x^2 + y^2(x)) + \_C1 = 0.$$

۱۸.۱۹.۱ . یافتن فاکتور انتگرال برای یک معادله دیفرانسیل دستور کلی برای یافتن فاکتور انتگرال یک معادله دیفرانسیل معمولی با استفاده از نرم افزار میپل چنین است:

```
PDETools[intfactor]( ODE, _mu=f(x,y) );
```

که در آن ODE یک معادله دیفرانسیل معمولی مفروض است، و f(x،y) شکل احتمالی فاکتور انتگرال است که از پیش حدس شده است. البته، اگر حدسی از ابتدا وجود نداشته باشد، می‌توان از دستور ساده‌تر زیر استفاده نمود:

```
PDETools[intfactor]( ODE );
```

۱.۱۹.۱۹. مثال برای پیدا کردن یک فاکتور انتگرال برای معادله دیفرانسیل

$$3\,x^2\,y^2(x)\,y'(x)+x^4\,\ln(x)-2\,x\,y^3(x)$$

از دستور

```
ODE := 3*x^2*y(x)^2*diff(y(x),x) +x^4*ln(x)-2*x*y(x)^3;
M := DETools[intfactor]( ODE );
```

استفاده می‌کنیم. نتیجه، چنین خواهد بود:

$$M=\frac{1}{x^4}.$$

توجه شود که در اینجا اسم فاکتور انتگرال بدست آمده را M نامیده‌ایم. با ضرب کردن این عامل در معادله مفروض، به یک معادله کامل می‌رسیم. معادله حاصل را با دستور

```
DETools[firint]( M*ODE );
```

می‌توان حل نمود:

$$\frac{y^3(x)}{x^2}+x\,\ln(x)-x+\_C1=0.$$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا

بخش ۱.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱.۲. تعریف معادله دیفرانسیل با مرتبه ≤ 2 را معادله دیفرانسیل مرتبه بالا می‌نامند. فرم کلی این گونه معادلات به صورت:

$$\boxed{\mathscr{E}\ :\ F\Big(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\Big)=0,} \qquad (۱.۲)$$

است که $\partial F/\partial y^{(n)}\neq 0$. معادله $\mathscr{E}$ را از مرتبه n ام می‌نامیم. مساله یافتن جواب دستگاه: [۱]

$$\begin{cases} y^{(n)}=f\Big(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\Big), \quad x\in I,\\ y(x_0)=y_0,\\ y'(x_0)=y'_0,\\ \quad\vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

را مساله کوشی یا مساله با مقدار اولیه می‌نامیم که $I\subseteq\mathbb{R}$ یک بازه است و $x_0\in I$.

۲.۱.۲. قضیه *فرض کنیم $D\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ و $f\,:\,D\to\mathbb{R}$ و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول آن بر D پیوسته باشند و $\partial f/\partial y$، . . . و $\partial f/\partial y^{(n-1)}$ بر D کراندار باشند، در این صورت به ازای هر $\Big(x_0,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}\Big)$ از D یک $\varepsilon>0$ ای هست و یک تابع $\varphi\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده بر بازه $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ به گونه‌ای که*

$$\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\ :\ \varphi^{(n)}(x)=f\Big(x,\varphi(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x)\Big),$$
$$\varphi(x_0)=y_0,\ \ \varphi'(x_0)=y'_0,\ \ \cdots,\ \ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0).$$

---

[۱] — آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ — تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa2.pdf

این تابع در حد یک همسایگی از x_0 منحصر بفرد است. به این معنی که اگر φ و ψ هر دو در شرایط بالا صدق کنند، آنگاه در یک همسایگی از x_0 برابرند.

۳.۱.۲. مثال فرض کنیم $\mathscr{E} : y'' = \sin y' + \exp(-yx^2)$. در این صورت:

$$f(x,y,y') = \sin y' + \exp(-yx^2), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -2xy\exp(-yx^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2\exp(-yx^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y',$$

که جملگی بر $D = \mathbb{R}^2$ پیوسته‌اند و توابع $\partial f/\partial y$ و $\partial f/\partial y'$ بر D کراندارند. در این صورت بنا به ۲.۱.۲ به ازای هر $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$ یک $\varepsilon > 0$ ای و یک تابع $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ای وجود دارد که اولا در $\mathscr{E}$ صدق می‌کند به ازای هر $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ و در ثانی $\varphi(x_0) = y_0$ و $\varphi'(x_0) = y'_0$. بعلاوه این تابع در حد یک همسایگی از x_0 منحصر به فرد است.

۴.۱.۲. مثال نشان دهید $\mathscr{S} : y = Ax + B$ که A و B اعداد دلخواهند، جواب عمومی معادله $\mathscr{E} : y'' = 0$ است.

حل: روشن است که اگر $y = Ax + B$، آنگاه $y' = A$ و لذا $y'' = 0$ که در $\mathscr{E}$ صدق می‌کند. پس توابع در $\mathscr{S}$ در معادله $\mathscr{E}$ صدق می‌کنند. بالعکس فرض کنیم $y = f(x)$ در $\mathscr{E}$ صدق کند. در این صورت $\int y''\,dx = \int 0\,dx$ یا $f'(x) = A$ که A عددی ثابت است. مجدد ملاحظه می‌شود که $\int f'(x)\,dx = \int A\,dx$. در نتیجه $f(x) = Ax + B$ که به $\mathscr{S}$ تعلق دارد.

۵.۱.۲. مثال مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' = 2\sqrt{y'}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

در این صورت توابع $y_1 = 0$ و $y_2(x) = x^8/3$ هر دو جواب این مساله هستند. یعنی جواب وجود دارد ولی منحصر بفرد نیست! توجه شود که در این مساله:

$$f(x,y,y') = 2\sqrt{y'}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y'}},$$

که آخری در $(x, y, 0)$ بی‌کران است. یعنی، شرط کرانداری $\partial f/\partial y'$ در ۲.۱.۲ الزامی است.

۶.۱.۲. تمرینات در هر مورد نشان دهید که y جواب معادله $\mathscr{E}$ است:

1) $y = x(\sin x - \cos x)$, $\quad \mathscr{E} : y'' + y = 2(\cos x + \sin x)$,
2) $y = x^2 \ln x$, $\quad \mathscr{E} : xy'' = 2$,
3) $x + c = e^{-y}$, $\quad \mathscr{E} : y'' = y'^2$,
4) $x = 1 + e^t$, $y = te^t$, $\quad \mathscr{E} : (x-1)y'' = 1$,
5) $x = A + t^4/4$, $y = B + t^5/5$, $\quad \mathscr{E} : y''y'^3 = 1$.

۶) نشان دهید $y = A\sin x + B\cos x$ جواب عمومی $y'' + y = 0$ است.

۷) نشان دهید $y = Ae^x + Be^{2x} + 1$ جواب عمومی $y'' - 3y' + 2y = 2$ است.

بخش ۲.۲ کاهش مرتبه معادلات مرتبه بالا

به عملیاتی بر معادله که در نتیجه آن معادله‌ای از مرتبه پایین‌تر حاصل گردد، کاهش مرتبه می‌گوییم. مثلا، اگر از طرفین معادله $y''=0$ انتگرال بگیریم، به معادله $y'=A$ می‌رسیم که از یک مرتبه پایین‌تر می‌باشد. البته، این طور نیست که مرتبه هر معادله‌ای را بتوان کاهش داد، اما در برخی موارد این کار ممکن است و با این کار (احتمالاً) قسمتی از مشکلات حل می‌شود.

۱.۲.۲. تعریف (معادلات به شکل $(\mathscr{E}: y^{(n)}=f(x))$ برای کاهش مرتبه چنین معادلاتی، می‌توان از دو طرف معادله داده شده نسبت به x انتگرال گرفت. با ادامه این کار رفته رفته مرتبه معادله کم شده و نهایتاً y با n بار انتگرالگیری بدست می‌آید. جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین بدست خواهد آمد:

$$\boxed{\mathscr{S}: y=\underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{ تا}} f(x)\underbrace{dx\cdots dx}_{n\text{ تا}}+A_{n-1}x^{n+1}+\cdots+A_1x+A_0,} \tag{۲.۲}$$

که $A_{n-1},\cdots,A_1,A_0$ اعداد ثابت دلخواهند.

۲.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y^{(4)}=x+1$ را حل کنید.

حل: به چهار با انتگرالگیری از $x+1$ نیاز است:

$$\begin{aligned} y &= \iiiint (x+1)\,dx\,dx\,dx\,dx \\ &= \iiint \left\{\frac{x^2}{2}+x\right\} dx\,dx\,dx+A \\ &= \iint \left\{\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right\} dx\,dx+Ax+B \\ &= \int \left\{\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}\right\} dx+A\frac{x^2}{2}+Bx+C \\ &= \frac{x^5}{125}+\frac{x^4}{24}+A\frac{x^3}{6}+A\frac{x^2}{6}+B\frac{x^2}{2}+Cx+D \end{aligned}$$

پس، در مجموع:

$$\mathscr{S}: y=\frac{x^5}{125}+\frac{x^4}{24}+AX^3+Bx^2+Cx+D.$$

۳.۲.۲. مثال جواب عمومی معادلهٔ $\mathscr{E}: y^{(n)}=e^{-x}$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه در این مساله $f(x)=e^{-x}$ و $\int f(x)\,dx=-e^{-x}$، پس به استقرا می‌توان نوشت:

$$\underbrace{\iint\cdots\int}_{n\text{تا}} f(x)\underbrace{dx\cdots dx\,dx}_{n\text{تا}}=(-1)^n e^x+P(x);$$

که $P(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه با ضرایب ثابت و از درجه $n-1$ است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: y=(-1)^n e^{-x}+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_1x+A_0.$$

۴.۲.۲. تعریف (معادلاتی که خود تابع y و مشتقات تا مرتبه $(k-1)$ ام آن را در بر ندارند) برای حل معادله دیفرانسیلی به شکل

$$\mathscr{E}\ :\ F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0,$$

کافی است از تابع جدید $u = y^{(k)}$ استفاده کرده و بنویسیم:

$$\mathscr{E}\ :\ F\left(x, u, u', \cdots, u^{(n-k)}\right) = 0;$$

پس از حل این معادله دیفرانسیل مرتبه $(n-k)$ ام و یافتن u، کافی است معادله $y^{(k)} = u$ را حل کنیم که بحث آن در ۱-۲-۲ آمده است.

۵.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\ :\ y''' = \sqrt{1+(y'')^2}$ را حل کنید.

حل: در این معادله y و y' حضور ندارند. پس تابع جدید $u = y''$ را معرفی می‌کنیم. به این ترتیب مساله جدید $u' = \sqrt{1+u^2}$ را داریم که معادله‌ای تفکیک پذیر است. در نتیجه

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int dx.$$

پس از انتگرال گیری داریم:

$$x = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C = \sinh^{-1} u + C.$$

در نتیجه $u = \sinh(x-C)$، اما توجه داریم که $u = y''$، در نتیجه:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}\ :\ y &= \iint \sinh(x-C)\,dx\,dx \\ &= \int (\cosh(x-C) + A)\,dx, \\ &= \sinh(x-C) + Ax + B;\end{aligned}$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۶.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\ :\ x^2 + xy^{(4)} = y''' + 1$ را حل کنید.

حل: در این معادله y و y' و y'' حضور ندارند. پس تابع جدید $u = y'''$ را معرفی می‌کنیم. معادله داده شده به شکل $x^2 + xu' = u + 1$ تبدیل می‌گردد که یک معادله خطی مرتبه اول است. پس:

$$\begin{aligned}h &= \exp\left(\int \frac{-1}{x}\,dx\right) \\ &= \exp(-\ln x) \\ &= \frac{1}{x}, \\ u &= x\left(\int \frac{1}{x}\,\frac{1-x^2}{x}\,dx + C\right) \\ &= x\left(\frac{-1}{x} - x + C\right) = Cx - 1 - x^2.\end{aligned}$$

اما بنا به فرض $u = y'''$، در نتیجه، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} : y &= \iiint \left\{Cx - 1 - x^2\right\} dx\,dx\,dx, \\
&= \iint \left\{\frac{C}{2}x^2 - x - \frac{x^3}{3} + A\right\} dx\,dx, \\
&= \int \left\{\frac{C}{6}x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + Ax + B\right\} dx, \\
&= \frac{C}{24}x^4 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{A}{2}x^2 + Bx + D,
\end{aligned}$$

که A، B، C و D اعداد ثابت دلخواهند.

۷.۲.۲. تعریف (معادلاتی که در آنها متغیر مستقل حضور ندارد) شکل کلی این معادلات:

$$\boxed{\mathscr{E} : F\left(y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0,} \tag{۳.۲}$$

است. برای حل این گونه معادلات از تابع جدید $p = y'$ و متغیر جدید y استفاده می‌کنیم. در ادامه لازم است $\mathscr{E}$ را برحسب p و y بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = p, \\
y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} \\
&= \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \\
y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) \\
&= \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) \\
&= p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\boxed{y' = p, \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}, \qquad y''' = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.} \tag{۴.۲}$$

به این ترتیب به جای معادله مرتبه n ام $\mathscr{E}$، معادله‌ای از مرتبه $(n-1)$ ام برحسب p و y خواهیم داشت. اگر پس از حل معادله حاصل به $p = \varphi(y)$ برسیم، بایستی معادله تفکیک پذیر حاصل $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ را به منظور یافتن y بر حسب x حل کنیم.

۸.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم $y' = p$ و p تابع است و y متغیر باشد. در این صورت مطابق (۴.۲) داریم $y'' = p\frac{dp}{dy}$

و لذا معادله $\mathscr{E}$ به شکل $p\frac{dp}{dy}+p^2=2e^{-y}$ در می‌آید که یک معادله برنولی است. $\dfrac{dp}{dy}+p=2e^{-y}p^{-1}$.
این معادله را با فرض تابع جدید $u=p^{1-(-1)}$ به معادله خطی مرتبه اول $\dfrac{du}{dy}+2u=4e^{-y}$ تبدیل کنیم.
جواب این معادله عبارت از $u=4e^{-y}+Ae^{-2y}$ است، که A عددی دلخواه است. اما $u=p^2=(y')^2$.
حال، با توجه به $p=\frac{dy}{dx}$، داریم

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{4e^{-y}+Ae^{-2y}},$$

که معادلاتی تفکیک پذیر بر حسب x و y هستند. در نتیجه، داریم:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{4e^{-y}+Ae^{-2y}}}=\pm\int dx.$$

با فرض $t=e^y$ در انتگرال سمت چپ داریم:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{4t+A}}=\pm(x+B).$$

پس، در مجموع $\frac{1}{2}\sqrt{4t+A}=\pm(x+B)$ یا $(4t+A)=4(x+B)^2$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y=\ln((x-C_1)^2+C_2).$$

۹.۲.۲. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}\ :\ y''=2y^3,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=1.$$

حل: با فرض تابع جدید $p=y'$ و متغیر y و با توجه به اینکه $y''=p\frac{dp}{dy}$ داریم

$$p\frac{dp}{dy}=2y^3,$$

که معادله‌ای تفکیک پذیر است. در نتیجه $p^2=y^4+A$ که A عددی ثابت است. اما $p=\frac{dp}{dx}$، پس دو معادله دیفرانسیل داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^4+A}, \tag{۵.۲}$$

که این نیز یک معادله تفکیک پذیر است. پس، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$x+B=\pm\int\frac{dy}{\sqrt{y^4+A}}. \tag{۶.۲}$$

البته انتگرال سمت راست یک دو جمله‌ای دیفرانسیلی با پارامترهای $m=0$، $n=2$ و $p=\frac{-1}{2}$ است؛ که غیر قابل حل (تحلیلی) است. از فرض $y'(0)=1$ و $y(0)=1$ نتیجه می‌شود $p(1)=1$ که اگر آن را (۵.۲)

) اعمال کنیم، نتیجه خواهیم گرفت که $A = 0$، پس معادله (۶.۲) به صورت $x + B = \pm \int \frac{dy}{y^2}$ می‌شود که قابل حل است. $x + B = \frac{\pm 1}{y}$. اکنون از فرض $y(0) = 1$ استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که $B = \pm 1$. بنابراین، جواب مساله داده شده عبارتست از $x = \pm(\frac{1}{y} - 1)$. اما در این صورت $\pm\frac{y'}{y^2} = 1$ که با توجه به فرضیات $y'(0) = y(0) = 1$ بایستی علامت + انتخاب شود. بنابراین، جواب مساله داده شده عبارت است از $y = \frac{1}{1-x}$.

۱۰.۲.۲. تعریف (معادلاتی که نسبت به $y, y', \cdots, y^{(n)}$ همگن هستند.) فرض کنید

$$\mathscr{E} : F\Big(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\Big) = 0,$$

معادله‌ای دیفرانسیلی است به گونه‌ای که به ازای هر $t > 0$ ای:

$$\boxed{F\Big(x, ty, ty', \cdots, ty^{(n)}\Big) = t^k F\Big(x, y, y', \cdots y^{(n)}\Big).} \tag{۷.۲}$$

در این صورت با معرفی تابع جدید $y = \exp\Big(\int z dx\Big)$ و بازنویسی $\mathscr{E}$ بر حسب z و x به معادله‌ای از یک مرتبه پایین‌تر دست می‌یابیم.

۱۱.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : x^2 yy'' = (y - xy')^2$ را حل کنید.

حل: در این مساله $F(x, y, y', y'') = x^2 yy'' - (y - xy')^2$ و ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} F(x, ty, ty', ty'') &= x^2.ty.ty'' - (ty - x.ty')^2 \\ &= t^2.F(x, y, y', y'') \end{aligned}$$

پس F نسبت به y، y' و y'' همگن است. فرض کنیم z تابعی جدید است که $y = \exp(\int z dx) = e^{\int z dx}$ در این صورت

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\exp\Big(\int z dx\Big) \\ &= z\exp\Big(\int z dx\Big), \\ y'' &= \frac{d}{dx}\Big(z\exp\Big(\int z dx\Big)\Big) \\ &= (z' + z^2)\exp\Big(\int z dx\Big). \end{aligned}$$

پس از قرار دادن در $\mathscr{E}$ نتیجه می‌گیریم:

$$x^2(z' + z^2)\exp\Big(2\int z dx\Big) = \Big(\exp\Big(\int z dx\Big) - xz\exp\Big(\int z dx\Big)\Big)^2.$$

و یا به عبارت دیگر $z^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2$، که یک معادله خطی مرتبه اول است:

$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}.$$

پس از حل این معادله، داریم $x^2z = x+A$ که A عددی ثابت است. اما مطابق فرض $y = \exp\left(\int z\,dx\right)$، بنابراین:

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int \frac{x+A}{x^2}\,dx\right)\\ &= \exp\left(\ln|x| - \frac{A}{x} + \ln B\right); \end{aligned}$$

که $B > 0$ نیز عددی ثابت است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} = \left\{y = Bxe^{-A/x} \,:\, A, B \in \mathbb{R}\right\}.$$

حالت $B < 0$ برای وقتی است که $x < 0$ و حالت $B = 0$ به $y = 0$ منجر می‌شود که یک جواب مساله است.

۱۲.۲.۲. مثال معادله $\mathscr{E} \,:\, 2yy'' = 3y'^2 + 4y^2$ را حل کنید.

حل: در این مساله $F(x,y,y',y'') = 2yy'' - 3y'^2 - 4y^2$ که به وضوح نسبت به y، y' و y'' همگن از مرتبه دو است. پس فرض می‌کنیم z تابع جدید است و $y = \exp\left(\int z\,dx\right)$. در این صورت:

$$2\exp\left(\int z\,dx\right)\times(z'+z^2)\exp\left(\int z\,dx\right) = 3\exp\left(\int z\,dx\right)^2 + 4\exp\left(\int z\,dx\right)^2,$$

یا $2(z'+z^2) = 3z^2 + 4$، که معادله‌ای تفکیک پذیر بر حسب z و x است:

$$2\int \frac{dz}{z^2+4} = \int dx,$$

که جواب عمومی آن $\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} = x + C$ است. بنابراین $z = 2\tan(2x+A)$، که A عددی دلخواه است. اما $y = e^{\int z\,dx}$، بنابراین

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int z\tan(2x+A)\,dx\right)\\ &= \exp\left(-\ln|\cos(2x+A)| + \ln B_1\right), \end{aligned}$$

که B_1 عددی مثبت است. بنابراین

$$\mathscr{S} \,:\, y = \frac{B}{\cos(2x+A)},$$

که B عددی دلخواه است. در واقع اگر مخرج مثبت باشد $B = B_1$ و اگر منفی باشد $B = -B_1$ حالت $B = 0$ به $y = 0$ نظیر است که جواب $\mathscr{E}$ است.

۱۳.۲.۲. معادلات همگن نسبت به $d^ny, \cdots, d^2y, dy, dx, y, x$ فرض کنید معادله مرتبه n ام $\mathscr{E}$ را به شکل تابعی از متغیرهای

$$\mathscr{E} \,:\, G\left(x, y, d, d'y, d^2y, \cdots, d^ny\right) = 0,$$

تصور کنیم، فرض کنید G به گونه‌ای است که به ازای هر t مثبت:

$$\boxed{G\big(t.x, t^m.y, t.dx, t^m.dy, t^m.d^2y, \cdots, t^m.d^ny\big) = t^k.G\big(x, y, dx, dy, d^2y, \cdots, d^ny\big),} \tag{۲.۸}$$

که k عددی ثابت است. در این صورت از تابع جدید u و متغیر جدید t استفاده می‌کنیم به گونه‌ای که

$$x = e^t, \qquad y = ue^{mt}.$$

پس از اعمال این تغییر متغیر و تابع به معادله‌ای می‌رسیم که در آن مقادیر t حضور ندارد، یعنی از نوع ۲.۲.۷ است.

۲.۲.۱۴. مثال معادله $\mathscr{E} : x^3y'' = (y - xy')^2$ را حل کنید.

حل: در این مساله

$$G\big(x, y, dx, dy, d^2y\big) = x^3\frac{d^2y}{dx^2} - \Big(y - x\frac{dy}{dx}\Big)^2.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} G\big(tx, t^m.y, t.dx, t^m.dy, t^m.d^2y\big) &= (t.x)^3\frac{t^m.d^2y}{(t.dx)^2} - \Big(t^m.y - (t.x).\frac{t^m.dy}{t.dx}\Big)^2, \\ &= t^{m+1}.x^3\frac{d^2y}{dx^2} - t^{2m}.\Big(y - x\frac{dy}{dx}\Big)^2. \end{aligned}$$

پس در صورتی می‌توان توانی از t را فاکتور گرفت که $m + 1 = 2m$ یا $m = 1$. در این صورت مطابق ۲.۲.۱۳ از تابع جدید u و متغیر جدید t استفاده می‌کنیم که $x = e^t$ و $y = ue^t$، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{e^t du/dt + e^t u}{e^t} \\ &= \frac{du}{dt} + u, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{e^t d^2u/dt^2 + du/dt}{e^t} \\ &= \left(\frac{d^2u}{dt} + \frac{du}{dt}\right)e^{-t}. \end{aligned}$$

پس معادله $\mathscr{E}$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(e^t)^3\left(\frac{d^2u}{dt} + \frac{du}{dt}\right)e^{-1} = \left(ue^t - e^t\left(\frac{du}{dt} + u\right)\right)^2.$$

یا به بیان دیگر

$$\mathscr{E} : \frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \frac{du}{dt},$$

که با فرض $p = du/dt$ کاهش مرتبه می‌یابد:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{d(du/dt)}{dt} = \frac{dp}{dt}\\ &= \frac{dp}{du}\frac{du}{dt} = p\frac{dp}{du}.\end{aligned}$$

پس معادله $\mathscr{E}$ به شکل

$$p\frac{dp}{du} + p = p^2,$$

درمی‌آید. پس یا $p = 0$ و لذا $u = C$ و چون $y = ue^t$، داریم $x = Cy$ اگر $p \neq 0$ پس باید $\frac{dp}{du} + 1 = p$ که یک معادله تفکیک پذیر است. بنابراین

$$\int \frac{dp}{p-1} = \int du \quad \Longrightarrow \quad p = 1 + Be^u,$$

که B عددی دلخواه است. اما $p = du/dt$؛ بنابراین $du/dt = 1 + Be^u$ که معادله‌ای تفکیک پذیر است. بنابراین

$$\int \frac{du}{1+Be^u} = \int dt \quad \Longrightarrow \quad u = \ln\frac{e^t}{Be^t + A}.$$

از طرفی $x = e^t$ و $y = ue^t$، بنابراین $\frac{y}{x} = \ln(\frac{x}{Bx+A})$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{E}\,:\, y = \ln\left(\frac{x}{Bx+A}\right).$$

۱۵.۲.۲. مثال معادله $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x}{y}$ را به یک معادله مرتبه اول تبدیل کنید.

حل: در این مساله

$$G(x,y,dx,dy,d^2y) = 2\frac{d^2y}{(dx)^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y};$$

و ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}G(tx,t^m.y,t.dx,t^m.dy,d^m.d^2y) &= 2\frac{t^m.d^2y}{(t.dx)^2} - \frac{1}{t.x}\frac{t^m.dy}{t.dx} + \frac{t.x}{t^m.y},\\ &= t^{m-2}.\left(2\frac{d^2y}{(dx)^2}\right) - t^{m-2}.\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right) + t^{1-m}.\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

پس در صورتی می‌توان توانی از t را فاکتور گرفت که $m-2 = 1-m$ یعنی $m = \frac{3}{2}$. بنابراین، از تابع جدید u و متغیر t استفاده می‌کنیم که

$$y = ue^{3t/2}, \qquad x = e^t.$$

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} \\
&= \left(\frac{du}{dt}e^{3t/2} + \frac{3}{2}ue^{3t/2}\right) \div e^t, \\
&= e^{3t/2}\left(\frac{du}{dt} + \frac{3}{2}u\right), \\
y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \div \frac{dx}{dt} \\
&= \left(\frac{3}{2}e^{3t/2}\left\{\frac{du}{dt} + \frac{3}{2}u\right\} + e^{3t/2}\left\{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{du}{dt}\right\}\right) \div e^t, \\
&= e^{-t/2}\left(\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + \frac{3}{4}u\right),
\end{aligned}
$$

اکنون معادله $\mathscr{E}$ را بر حسب u و t بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{du}{dt} = \frac{1}{2u},$$

که معادله‌ای فاقد متغیر مستقل t است. پس تابع جدید $p = du/dt$ و متغیر u را به کار می‌گیریم:

$$\frac{dp}{du} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2up}.$$

چنانچه فرض شود $z = p + \frac{3}{2}u$؛ در این صورت داریم $\frac{dz}{du} = \frac{1}{2u(z-3u/2)}$ و به بیان دیگر

$$\frac{du}{dz} = u(2z - 3u),$$

که یک معادله برنولی است. پس فرض می‌کنیم $u = s^{1-2}$ و مساله را برحسب s و z بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{ds}{dz} = 2zs - 3,$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است. جواب آن عبارتست از $s = e^{-z^2}\left(3\int e^{z^2}\,dz + C\right)$ یا

$$e^{1/(p+3u/2)^2} = 3u\int_0^{p+3u/2} e^{t^2}\,dt + Cu.$$

معادله آخر عملا روش حل تحلیلی ندارد، زیرا مطابق $p = du/dt$ که معادله حاصل غیر خطی و بسیار پیچیده است.

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

۱۶.۲.۲. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1) $y^{(4)} = x,$ 2) $y''(x+2)^5 = 1,$
3) $y''' = x + \cos x,$ 4) $y' = xy'',$
5) $xy'' = (1+2x^2)y',$ 6) $xy'' + y' = 0,$
7) $xy'' + y' = x^2,$ 8) $xy'' \ln x = y',$
9) $xy = y' \ln(y'/x),$ 10) $2y'' = y'/x + x^2/y',$
11) $y''' = \sqrt{1-y''^2},$ 12) $y'' = 1 + y'^2,$
13) $xy''' = y'',$ 14) $y'' + y' + 2 = 0,$
15) $yy'' = y'^2,$ 16) $y'' = y'(1+y'),$
17) $2y'' = 3y^2,$ 18) $y''' + y''^2 = 0,$
19) $3y'y'' = 2y,$ 20) $y'' = 2yy'',$
21) $y^3y'' = -1,$ 22) $yy'' = y'^2 + y^2y',$
23) $2yy'' = 3y'^2 + 4y^2,$ 24) $y''' = 3yy'.$

بخش ۳.۲ معادلات خطی مرتبه بالا

۱.۳.۲. تعریف فرض کنید $a_0(x)$، $a_1(x)$، . . . $a_n(x)$ و $f(x)$ توابعی بر بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ هستند. معادله به فرم

$$\boxed{\mathscr{E} : a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),} \tag{۹.۲}$$

را **معادله دیفرانسیل خطی** می‌نامند. اگر $a_n(x) \neq 0$، n را مرتبه $\mathscr{E}$ می‌نامیم. اگر $f(x)$ بر I صفر باشد، معادله $\mathscr{E}$ را **همگن** می‌نامیم. معادله

$$\boxed{\mathscr{E}_h : a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,} \tag{۱۰.۲}$$

را **معادله همگن نظیر به** $\mathscr{E}$ می‌نامیم.

۲.۳.۲. قضیه *فرض کنید y_h جواب عمومی $\mathscr{E}_h$، y جواب عمومی $\mathscr{E}$ و y_p یک جواب خصوصی معادله $\mathscr{E}$ باشد. در این صورت $y = y_h + y_p$.*

برهان : اگر y یک جواب دلخواه معادله $\mathscr{E}$ باشد، آنگاه $y - y_p$ در معادله همگن $\mathscr{E}_h$ صدق می‌کند، زیرا

$$\begin{aligned} & a_n(x)(y-y_p)^{(n)} + \cdots + a_1(x)(y-y_p)' + a_0(x)(y-y_p) = \\ &= \left(a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y\right) - \left(a_n(x)y_p^{(n)} + \cdots + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p\right) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، $y - y_p$ باید به صورت یک y_h ای باشد. □

۳.۳.۲. نتیجه *برای حل معادله دیفرانسیل خطی $\mathscr{E}$ ابتدا جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ را بدست آورده، سپس یک جواب خصوصی از $\mathscr{E}$ بدست می‌آوریم و آنگاه آنها را جمع می‌کنیم.*

بنابراین، حل مساله معادله خطی مرتبه بالا به دو مساله تقسیم می‌گردد:

۱) مساله حل یک معادله خطی مرتبه بالای همگن و

۲) مساله یافتن یک جواب خصوصی معادله مفروض.

مساله اول در قالب موارد بسیار ساده حل می‌شود، ولی برای حل مساله دوم فصول متعددی ظاهر می‌گردد که هر یک دامنه‌ای از توابع $f(x)$ را پوشش می‌دهد.

۴.۳.۲. تعریف فرض کنید $f_n(x),\cdots,f_2(x),f_1(x)$ توابعی بر بازه $I\subseteq\mathbb{R}$ هستند و $C_n,\cdots,C_2,C_1$ اعداد ثابت دلخواهند. تابع:

$$f(x)=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x),$$

را یک **ترکیب خطی توابع** $f_n,\cdots,f_2,f_1$ بر بازه I می‌نامیم. ترکیب بالا را در صورتی صفر می‌گوییم که به ازای هر $x\in I$ ای $f(x)=0$. ترکیب بالا را در صورتی بدیهی می‌گوییم که همه ضرایب آن صفر باشند: $\forall i:\ c_i=0$.

در صورتی می‌گوییم توابع $f_n,\cdots,f_2,f_1$ بر I **مستقل خطی‌اند** که هر ترکیب خطی صفر آنها بدیهی باشد. به بیان دیگر

$$\forall x\in I:\ C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x)=0\implies C_1=C_2=\cdots=C_n=0.$$

توابع را در صورتی **وابسته خطی** گوییم که مستقل خطی نباشند.

۵.۳.۲. مثال فرض کنیم $f_1=1$، $f_2=x$ و $f_3=x^2$. در این صورت f_1، f_2 و f_3 بر $I=\mathbb{R}$ مستقل خطی‌اند. زیرا اگر $f=C_1f_1+C_2f_2+C_3f_3$، آنگاه اگر $f\equiv0$، داریم:

$$\begin{cases} f(0)=0,\\ f(1)=0,\\ f(-1)=0,\end{cases}\implies\begin{cases} C_1(1)+C_2(0)+C_3(0)=0,\\ C_2(1)+C_3(1)=0,\\ C_2(-1)+C_3(1)=0,\end{cases}\implies\begin{cases} C_1=0,\\ C_2+C_3=0,\\ -C_2+C_3=0.\end{cases}$$

پس $C_1=C_2=C_3=0$ و برهان تمام است.

۶.۳.۲. مثال فرض کنید $f_1=1$، $f_2=\sin^2x$ و $f_3=\cos^2x$. در این صورت f_1، f_2 و f_3 بر $I=\mathbb{R}$ وابسته خطی‌اند، زیرا

$$(1)f_1+(-1)f_2+(-1)f_3=0.$$

این تساوی به معنی $\sin^2+\cos^2x=1$ است.

۷.۳.۲. مثال در هر خانواده از توابع که تابع صفر وجود داشته باشد، آن خانواده وابسته خطی است.

۸.۳.۲. قضیه *فرض کنید $a_0(x)$، $a_1(x)$، . . . و $a_n(x)$ توابعی پیوسته بر $I\subseteq\mathbb{R}$ هستند در این صورت n تابع مستقل خطی $f_1(x)$، $f_2(x)$، . . . و $f_n(x)$ بر I به گونه‌ای وجود دارند که جواب عمومی همگن*

$$\mathscr{E}_h:\ a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0,$$

برابر مجموعه ترکیبات خطی این توابع است:

$$\mathscr{S}_h : y_h = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \qquad c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}.$$

۹.۳.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + y = 1$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h : y'' + y = 0$. ملاحظه می‌شود که توابع $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \cos x$ جواب $\mathscr{E}_h$ هستند و مستقل خطی هستند. پس بنا به ۸.۳.۲ جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = A\sin x + B\cos x$ که A و B اعداد دلخواهند. بعلاوه، به وضوح $y_p = 1$ در $\mathscr{E}$ صدق می‌کند. بنابراین، بنا به قضیه ۲.۳.۲ جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} y &= y_p + y_h \\ &= 1 + A\sin x + B\cos x, \end{aligned}$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند. در این مساله $I = \mathbb{R}$.

۱۰.۳.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : x'y'' - xy' + 2y = x\ln x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $\mathscr{E} : x'y'' - xy' + 2y = 0$. توابع $f_1 = \sin(\ln x)$ و $f_2 = \cos(\ln x)$ بر $I = (0;\infty)$ جواب $\mathscr{E}_h$ هستند و مستقل خطی می‌باشند. بعلاوه $y_p = x\ln x$ یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ بر I است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} y &= y_p + y_h \\ &= x\ln x + A\sin(\ln x) + B\cos(\ln x). \end{aligned}$$

۱۱.۳.۲. تمرینات در هر مورد نشان دهید که توابع داده شده مستقل خطی‌اند:

1) $y_1 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = e^{-x}, \qquad I = \mathbb{R},$
2) $y_1 = \tan x, \quad y_2 = \cot x, \qquad I = (0;\pi/2),$
3) $y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad y_3 = x^2e^x, \quad y_4 = x^3e^x, \qquad I = \mathbb{R},$
4) $y_1 = \sin x, \quad y_2 = \sin 2x, \quad y_3 = \sin 3x, \qquad I = \mathbb{R}.$

۵) نشان دهید که اگر در خانواده‌ای دو تابع مضربی از هم باشند، آن خانواده از توابع وابسته خطی هستند.

بخش ۴.۲ رونسکی و گرامی

اغلب تحقیق استقلال توابع کار وقت گیری است. دو راه برای ساده‌تر شدن این کار وجود دارد که توسط رونسکی و گرامی مطرح شده است.

۱.۴.۲. تعریف فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابعی بر $I \subseteq \mathbb{R}$ هستند. منظور از **رونسکی** این توابع، دترمینان

$$\boxed{W(y_1, y_2, \cdots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.} \tag{۱۱.۲}$$

می‌باشد. حاصل تابعی از x است که بر I تعریف می‌گردد.

۲.۴.۲. قضیه (قضیه لزوم) *فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ بر بازه I وابسته خطی هستند. در این صورت، رونسکی این توابع بر I متحد با صفر است. به بیان دیگر، اگر رونسکی این توابع بر I متحد صفر نباشد (یعنی، در لااقل یک $x_0 \in I$ ای مخالف صفر باشد) در این صورت این توابع مستقل خطی هستند.*

۳.۴.۲. مثال فرض کنید $y_1 = e^{ax}$، $y_2 = e^{bx}$ و $y_3 = e^{cx}$. در چه صورت این توابع مستقل خطی‌اند؟

حل: ابتدا رونسکی این توابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2,y_3) &= \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{vmatrix} \\ &= e^{ax}e^{bx}e^{cx}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= e^{(a+b+c)x}(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

پس اگر حتی به ازای یک $x_0 \in \mathbb{R}$ ای قرار باشد رونسکی این سه تابع صفر شود، لازم است که حاصلضرب $(a-b)(b-c)(c-a)$ صفر شود. یعنی $a = b$ یا $b = c$ یا $a = c$. یعنی، اگر این سه عدد a، b و c متفاوت باشند، آنگاه این سه تابع مستقل خطی هستند. بالعکس، روشن است که اگر برخی از این سه عدد a، b و c با هم برابر باشند، آنگاه توابع نظیر یکی می‌شوند و لذا مجموعه آنها وابسته خطی می‌شود.

۴.۴.۲. مثال نشان دهید توابع زیر به بازه $I = [0; 1]$ مستقل خطی هستند در حالی که رونسکی آنها بر این بازه صفر است. به بیان دیگر، شرط لازم برای وابستگی این است که رونسکی متحد با صفر باشد و این شرط کافی نیست:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1/2 \quad \text{اگر} \\ (x-1/2)^2 & 1/2 < x \le 1 \quad \text{اگر} \end{cases} \\ y_2(x) &= \begin{cases} (x-1/2)^2 & 0 \le x \le 1/2 \quad \text{اگر} \\ 0 & 1/2 \le x \le 1 \quad \text{اگر} \end{cases} \end{aligned}$$

حل: با توجه به تعریف رونسکی داریم:

$$W(y_1,y_2) = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & (x-1/2)^2 \\ 0 & 2(x-1/2) \end{vmatrix} = 0 & 0 \le x \le 1/2 \quad \text{اگر} \\ \\ \begin{vmatrix} (x-1/2)^2 & 0 \\ 2(x-1/2) & 0 \end{vmatrix} = 0 & 1/2 \le x \le 1 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

از طرفی اگر c_1 و c_2 اعدادی باشند که

$$f(x) := c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

بر I متحد صفر باشند، در این صورت با انتخاب $x = 1/4$ و $x = 3/2$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} f(1/2) = 0, \\ f(3/2) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2(1/4-1/2)^2 = 0, \\ c_1(3/4-1/2)^2 = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

پس این توابع مستقل خطی هستند.

۵.۴.۲. قضیه (قضیه کفایت) *فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابعی بر بازه I هستند و همگی جواب یک معادله دیفرانسیل خطی همگن هستند. اگر به ازای هر $x \in I$ ای رونسکی این توابع صفر باشد، آنگاه توابع مذکور بر I وابسته خطی هستند. بعلاوه، اگر رونسکی این توابع در یک نقطه از I صفر باشد، آنگاه بر کل I صفر است.*

۶.۴.۲. مثال توابع $y_0 = (x+1)^2$، $y_1 = 1$، $y_2 = x$ و $y_3 = x^2$ جواب معادله $\mathscr{E} : y^{(3)} = 0$ هستند. بعلاوه

$$
\begin{aligned}
W(y_0, y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} (x-1)^2 & 1 & x & x^2 \\ 2(x+1) & 0 & 1 & 2x \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

پس این توابع وابسته خطی هستند.

۷.۴.۲. مثال توابع $y_1 = 1$، $y_2 = \sin 2x$ و $y_3 = (\sin x - \cos x)^2$ جواب معادله $\mathscr{E} : y''' + 4y' = 0$ هستند. بعلاوه

$$
\begin{aligned}
W(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} 1 & \sin 2x & (\sin x - \cos x)^2 \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \\ 0 & 4\sin 2x & 4\sin 2x \end{vmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

در نتیجه، این سه تابع وابسته خطی هستند.

۸.۴.۲. قضیه *فرض کنید $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ توابعی بر $I = [a,b]$ هستند. تعریف می‌کنیم:*

$$\boxed{\langle y_1, y_2 \rangle := \int_a^b y_1(x) y_2(x)\, dx.}$$

*اگر $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابعی بر I باشند، دراین صورت **گرامی** این توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\boxed{\Gamma(y_1, y_2, \cdots, y_n) := \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, y_n \rangle & \langle y_2, y_n \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}.} \qquad (۱۲.۲)$$

۹.۴.۲. قضیه *فرض کنید توابع $y_1, y_2, \cdots, y_n$ بر بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ تعریف شوند. در این صورت شرط لازم و کافی برای اینکه توابع مفروض بر I مستقل خطی باشند این است که گرامی آنها بر I مخالف صفر باشد.*

۱۰.۴.۲. مثال نشان دهید توابع $y_1 = x$ و $y_2 = 2x$ بر بازه $I = [0,1]$ وابسته خطی هستند.

حل: با توجه به ۷-۴-۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle y_1, y_1\rangle &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},\\
\langle y_1, y_2\rangle &= \langle y_2, y_1\rangle = \int_0^1 2x^2\,dx\\
&= 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},\\
\langle y_2, y_2\rangle &= \int_0^1 4x^2\,dx\\
&= 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\Gamma(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

۱۱.۴.۲. مثال نشان دهید توابع $y_1 = 1$، $y_2 = \sin x$ و $y_3 = \cos x$ بر $I = [0, 2\pi]$ مستق خطی هستند.

حل: به کمک ۷-۴-۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\Gamma(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} \int_0^{2\pi} 1dx & \int_0^{2\pi} \sin x\,dx & \int_0^{2\pi} \cos x\,dx \\ \int_0^{2\pi} \sin x dx & \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx \\ \int_0^{2\pi} \cos x dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx & \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} x\Big|_0^{2\pi} & -\cos x\Big|_0^{2\pi} & \sin x\Big|_0^{2\pi} \\ -\cos x\Big|_0^{2\pi} & \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi} & \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{2\pi} \\ \sin x\Big|_0^{2\pi} & \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{2\pi} & \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi} \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{vmatrix}\\
&= 2\pi^3 \neq 0.
\end{aligned}$$

۱۲.۴.۲. تمرینات در هر مورد مشخص کنید که دسته توابع داده شده مستقل خطی‌اند یا خیر.

1) $2,\ x,$
2) $1,\ 2,\ x,\ x^2,$
3) $\log_a x,\ \log_a x^2,$
4) $e^x,\ e^{-x},\ xe^x,$
5) $1,\ \arcsin x,\ \arccos x,$
6) $5,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,$
7) $2,\ \sin^2 x,\ \cos 2x,$
8) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$
9) $e^{-x}\sin x,\ e^{-x}\cos x,$
10) $\sin x,\ \sin(x+\pi/4).$

در هر مورد نشان دهید رونسکی توابع داده شده صفر است، ولی وابسته خطی نیستند:

11) $y_1(x)=\begin{cases} x^2 & -1\le x\le 0 \text{ اگر} \\ 0 & 0\le x\le 1 \text{ اگر}\end{cases} \qquad y_2(x)=\begin{cases} 0 & -1\le x\le 0 \text{ اگر} \\ x^2 & 0\le x\le 1 \text{ اگر}\end{cases}$

12) $y_1(x)=\begin{cases} x^3 & -2\le x\le 0 \text{ اگر} \\ 0 & 0\le x\le 1 \text{ اگر}\end{cases} \qquad y_2(x)=\begin{cases} 0 & -2\le x\le 0 \text{ اگر} \\ x^2 & 0\le x\le 1 \text{ اگر}\end{cases}$

۱۴) نشان دهید که اگر A خانواده‌ای از توابع مستقل خطی بر I باشد و B زیرمجموعه‌ای از A باشد، در این صورت B نیز مستقل خطی است.

بخش ۵.۲ معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

۱.۵.۲. تعریف معادله دیفرانسیل به شکل

$$\mathscr{E}\ :\ a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f,$$

که $a_n,\cdots,a_2,a_1$ اعداد ثابتند و f یک تابع است **معادله خطی با ضرایب ثابت** نامیده می‌شود. اگر $f\equiv 0$ معادله $\mathscr{E}$ را **معادله خطی همگن با ضرایب ثابت** می‌نامند.

۲.۵.۲. تعریف فرض کنید که $D=\dfrac{d}{dx}$ **عملگر مشتقگیری** نسبت به x است. در واقع D تابعی از مجموعه توابع بتوی مجموعه توابع است: $D(f)=f'$. حاصل دو بار به کارگیری D را با نماد D^2 نشان می‌دهیم. به صورت مشابه D^n قابل تعریف است:

$$D(f)=f,\qquad D^2(f)=f'',\qquad D^3(f)=f''',\qquad \dots.$$

ترکیب خطی با ضرایب تابعی نیز می‌شود تعریف نمود: اگر $a_0(x)$، $a_1(x)$، . . . و $a_n(x)$ توابعی مفروض باشند، در این صورت

$$\boxed{L=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0,} \tag{۱۳.۲}$$

یک عملگر است و به ازای هر تابع f و هر متغیر x به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$(Lf)(x)=a_n(x)f^{(n)}+a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)f'(x)+a_0(x)f(x).$$

۳.۵.۲. مثال $L=xD^2-D+1$ یک عمگر است. اگر $y=f(x)$ یک تابع باشد، آنگاه

$$L(f)=xf''-f'+f.$$

مثلا اگر $y=\sin x$، آنگاه:

$$L(y)=x(-\sin x)-\cos x+\sin x.$$

۴.۵.۲. مثال اگر $L = xD - 1$ و $M = D - x$، آنگاه $ML \neq LM$ زیرا اگر f تابعی دلخواه باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned}
(ML)(f) &= M(L(f)) \\
&= M(xf' - f) \\
&= (xf' - f)' - x(xf' - f) \\
&= xf'' - x^2 f' + xf, \\
(LM)(f) &= L(M(f)) \\
&= L(f' - xf) \\
&= x(f' - xf')' - (f' - xf) \\
&= xf'' - (1 + x^2)f',
\end{aligned}$$

که با هم متفاوتند.

۵.۵.۲. قضیه *اگر L و M عملگر خطی باشند و a و b توابع دلخواه، در این صورت $aL + bM$، LM و ML نیز عملگر خطی هستند. بعلاوه، اگر L و M با ضرایب ثابت باشند، آنگاه $ML = LM$.*

۶.۵.۲. تعریف در صورتی می‌گوییم عملگر خطی با ضرایب ثابت L **تجزیه پذیر** است که دو عملگر خطی با ضرایب ثابت M و N چنان یافت گردند که $L = MN$ و بعلاوه، M و N هیچ یک به صورت عدد ثابت نباشند. اگر چنین عملگرهایی به L نتوان نظیر کرد، می‌گوییم L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت **اول** است.

۷.۵.۲. قضیه *فرض کنید L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت است:*

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0.$$

در این صورت، شرط لازم و کافی برای اول بودن L آن است که

الف) یا $n = 1$ و $L = a_1 D + a_0$ با $a_1 \neq 0$ و

ب) یا اینکه $n = 2$ و $L = a_2 D^2 + a_1 D +_0$ با $a_2 \neq 0$ و $\triangle = a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$.

هر عملگر با ضرایب ثابت یا اول است و یا به صورت یکتا به شکل حاصل ضربی از عملگرهای اول قابل تجزیه است. این یکتایی در حد ضریب ثابت در عملگر است و نیز ترتیب عوامل در تجزیه است.

۸.۵.۲. مثال عملگرهای D، $D + 1$، $D^2 + 1$، $D^2 + D + 1$ و $D^2 - 2D + 2$ اولند، عملگرهای D^2، $D^2 + 5D + 6$، $D^3 + 1$ و $D^4 - 1$ اول نیستند، زیرا:

$$\begin{aligned}
D^2 &= D.D, \\
D^2 + 5D + 6 &= (D + 2)(D + 3), \\
D^3 + 1 &= (D + 1)(D^2 - D + 1), \\
D^3 - 1 &= (D^2 - 1)(D^2 + 1) \\
&= (D - 1)(D + 1)(D^2 + 1).
\end{aligned}$$

۹.۵.۲. مثال فرض کنید $L = D^2 - 1$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} L &= (D-1)(D+1) \\ &= (D+1)(D-1) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}D - 1\right). \end{aligned}$$

اما همه این تجزیه‌ها را یکی می‌دانیم. زیرا، دومی تغییر ترتیب داده شده اولی است و سومی با ضرب و تقسیم یک عامل عددی حاصل شود است. این مثال یکتایی تجزیه ادعا می‌شود در قضیه ۶-۵-۲ را توضیح می‌دهد.

۱۰.۵.۲. مثال عملگر $L = D^4 + 1$ اول نیست. زیرا، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} L &= (D^2+1) - 3D^2 \\ &= \left(D^2 + \sqrt{2}D + 1\right)\left(D^2 - \sqrt{2}D + 1\right). \end{aligned}$$

۱۱.۵.۲. تمرینات در هر مورد مشخص کنید که آیا عملگر داده شده اول است یا خیر. در صورتی که اول نباشد، آن را به حاصلضربی از عوامل اول تجزیه کنید.

1) $L = D^2,$ 2) $L = D^2 + D,$
3) $L = D^2 + 4,$ 4) $L = D^2 - 2D - 3,$
5) $L = D^3 + 4D^2 + 13D,$ 6) $L = D^5 + 9D^3,$

در هر مورد عملگر دیفرانسیلی نظیر به معادله خطی داده شده را تعیین و سپس آن را تجزیه کنید.

7) $y''' - 2y'' = 0,$ 8) $y''' - 3y'' - 2y' = 0,$
9) $2y'' - 3y' - 5y = 0,$ 10) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0,$
11) $y''' - 8y = 0,$ 12) $y^{(4)} + y = 0.$

۱۲.۵.۲. تعریف فرض کنید:

$$\mathscr{E} : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^2 + a_0 y = f,$$

یک معادله خطی با ضرایب ثابت مرتبه n ام باشد. چند جمله‌ای

$$\boxed{p(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,} \qquad (۱۴.۲)$$

را **چند جمله‌ای مشخصه** $\mathscr{E}$ می‌نامند. معادله $p(\lambda) = 0$ را با نماد $C_{\mathscr{E}}$ نشان داده و **معادله مشخصه** $\mathscr{E}$ می‌نامند:

$$\boxed{C_{\mathscr{E}} : a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.} \qquad (۱۵.۲)$$

در واقع $p(\lambda)$ همان عملگر خطی نظیر به $\mathscr{E}$ است که به جای D^m از λ^m استفاده شده است!

۱۳.۵.۲. قضیه (قضیه اساسی معادلات همگن با ضرایب ثابت) *فرض کنیم:*

$$\mathscr{E} : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

یک معادله خطی همگن و با ضرایب ثابت است و $C_{\mathscr{E}}$ معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}$ است. فرض کنید معادله $C_{\mathscr{E}}$ را حل کرده و به جوابهای به شرح زیر رسیده‌ایم:

۱) $\lambda = \lambda_1$ با تکرار m_1، $\lambda = \lambda_2$ با تکرار m_2، $\cdots$ و $\lambda = \lambda_k$ با تکرار m_k.

۲) $\lambda = \alpha_i \pm i\beta_1$ با تکرار p_1، $\lambda = \alpha_i \pm i\beta_2$ با تکرار p_2، و $\cdots$ و $\lambda = \alpha_\ell \pm i\beta_\ell$ با تکرار p_ℓ.

روشن است که بنا به قضیه اساسی جبر بایستی $n = m_1 + \cdots + m_k + 2(p_1 + \cdots + p_l)$. در این صورت، خانواده‌ای از توابع به شرح زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{array}{lllll}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & x^2e^{\lambda_1 x}, & \cdots, & x^{m-1}e^{\lambda_1 x}, \\
e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & x^2e^{\lambda_2 x}, & \cdots, & x^{m-1}e^{\lambda_2 x}, \\
 & & \vdots & & \\
e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & x^2e^{\lambda_k x}, & \cdots, & x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}, \\
 & & & & \\
e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), & xe^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), & \\
e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), & xe^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), & \\
 & & & & \\
e^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 x), & xe^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 x), & \\
e^{\alpha_2 x}\sin(\beta_2 x), & xe^{\alpha_2 x}\sin(\beta_2 x), & \cdots, & x^{p_1}e^{\alpha_2 x}\sin(\beta_2 x), & \\
 & & \vdots & & \\
e^{\alpha_\ell x}\cos(\beta_\ell x), & xe^{\alpha_\ell x}\cos(\beta_\ell x), & \cdots, & x^{p_\ell}e^{\alpha_\ell x}\cos(\beta_\ell x), & \\
e^{\alpha_\ell x}\sin(\beta_\ell x), & xe^{\alpha_\ell x}\sin(\beta_\ell x), & \cdots, & x^{p_\ell}e^{\alpha_\ell x}\sin(\beta_\ell x). &
\end{array} \tag{۱۶.۲}$$

در این صورت توابع مشروح در بالا مستقل خطی‌اند و هر جواب از $\mathscr{E}$ به صورت ترکیب خطی از آنها قابل بیان است.

۱۴.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y''' - 2y'' - 3y' = 0$ را حل کنید.

حل: در این مساله $C_{\mathscr{E}} : \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$ که در نتیجه:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda+1)(\lambda-3) = 0.$$

پس $p(\lambda)$ دارای ریشه‌های حقیقی متمایز $\lambda_1 = 0$، $\lambda_2 = -1$ و $\lambda_3 = 3$ است که هر سه با تکرار یک هستند: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. پس بنا به ۱۳.۵.۲، توابع

$$e^{0x} = 1, \quad e^{(-1)x} = e^{-x}, \quad e^{3x},$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و به علاوه جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = A + Be^{-x} + Ce^{3x},$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۱۵.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y''' + 2y'' + y' = 0$ را حل کنید.

حل: در این مساله $C_{\mathscr{E}} : \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$. ملاحظه می‌شود که

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = (\lambda+1)2 = 0.$$

پس $\lambda_1 = 0$ با تکرار $m_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ با تکرار $m_2 = 2$ ریشه‌های $C_{\mathscr{E}}$ هستند. بنابراین مطابق ۱۳.۵.۲ توابع

$$e^{0x} = 1, \quad e^{-1x} = e^{-x}, \quad xe^{-1x} = xe^{-x},$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S} \,:\, y = A + Be^{-x} + Cxe^{-x},$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۱۶.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E} \,:\, y''' + 4y'' + 13y' = 0$ را حل کنید.

حل: در این مساله $C_{\mathscr{E}} \,:\, \lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$. برای حل $C_{\mathscr{E}}$ ملاحظه می‌شود:

$$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda = -2 \pm i,$$

که هر دو با تکرار یک هستند. پس بنا به ۱۳.۵.۲ توابع

$$e^{0x} = 1, \quad e^{-2x}\cos 3x, \quad xe^{-2x}\sin 3x,$$

مستقل خطی‌اند و جواب $\mathscr{E}$ هستند و بعلاوه جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} \,:\, y = A + Be^{-2x}\cos 3x + Ce^{-2x}\sin 3x,$$

که A، B و C اعداد ثابت دلخواهند.

۱۷.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E} \,:\, y^{(5)} - 2y^{(4)} + 3y'''4y'' + y' - 2y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}} \,:\, \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

که آن را به صورت $(\lambda-2)(\lambda^2+1)^2 = 0$ می‌توان نوشت. پس، $\lambda = 2$ یک ریشه با تکرار یک و $\lambda = 0 \pm i$ دو ریشه مختلط مزدوج با تکرار دو هستند. بنابراین، مطابق ۱۳.۵.۲ توابع

$$\begin{aligned} &e^{2x}, \quad e^{0x}\cos 1x = \cos x, \quad e^{0x}\sin 1x = \sin x, \\ &xe^{0x}\cos 1x = x\cos x, \quad xe^{0x}\sin 1x = x\sin x, \end{aligned}$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S} \,:\, y = A + B\cos x + C\cos x + Dx\cos x + Ex\sin x,$$

که A، B، C، D و $\mathscr{E}$ اعداد ثابت دلخواهند.

۱۸.۵.۲. مثال معادله $\mathscr{E} \,:\, y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه این معادله عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0, \\ &: \quad (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

که ریشه‌های آن $\lambda = -1 \pm i$ با تکرار دو هستند. پس بنا به ۱۳.۵.۲ توابع

$$e^{-x}\cos x, \quad e^{-x}\sin x, \quad xe^{-x}\cos x, \quad xe^{-x}\sin x,$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x + Cxe^{-x}\cos x + Dxe^{-x}\sin x,$$

که A، B، C و D اعداد ثابت دلخواهند.

۱۹.۵.۲. تمرینات در هر مورد معادله خطی همگن داده شده را حل کنید:

1) $y'' = y,$
2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$
3) $3y'' - 2y' - 8y = 0,$
4) $y'' + 2y' + y = 0,$
5) $y^{(10)} = 0,$
6) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0,$
7) $y''' - 8y = 0,$
8) $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0,$
9) $y^{(4)} + 4y''' + 15y'' + 12y' = 0,$
10) $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0,$
11) $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 5y''' - 6y' - 4y = 0,$
12) $y^{(8)} + 4y^{(6)} + 6y^{(4)} + 4y'' + y = 0.$

بخش ۶.۲ یافتن معادله خطی همگنی که مجموعه جوابش مفروض است

از قضیه ۱۳.۵.۲ برای روند برعکس می‌توان استفاده کرد. یعنی می‌توان با داشتن چند تابع مستقل خطی، معادله خطی همگن را ساخت که توابع مفروض جواب آن باشند. اصول این کار در مثالهای زیر مشهود است.

۱.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = 1$، $y_2 = e^x$ و $y_3 = e^{-x}$ جواب آن باشند.

حل: روشن است که توابع داده شده مستقل خطی هستند. به علاوه می‌توان نوشت $y_1 = e^{0x}$ پس معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ باید دارای معادله مشخصه‌ای باشد با سه ریشه حقیقی $\lambda_1 = 0$، $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = -1$ که هر یک با تکرار $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad (\lambda - 0)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \\ &: \quad \lambda^3 - \lambda = 0. \end{aligned}$$

بنابراین عملگر L نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^3 - D$ و خود معادله عبارتست از

$$\mathscr{E}\ :\ Ly = 0 \quad : y''' - y' = 0.$$

۲.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = 1$، $y_2 = x^2$ و $y_3 = e^x$ جواب آن باشند.

حل: این توابع مستقل خطی‌اند (تمرین). به علاوه می‌توان نوشت:

$$y_1 = e^{0x}, \qquad y_2 = x^2 e^{0x}.$$

پس معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله $\mathscr{E}$ که به دنبال آن هستیم. دارای ریشه $\lambda_1 = 1$ با تکرار یک (نظیر به y_3) و ریشه $\lambda_2 = 0$ با تکرار سه (نظیر به y_1 و y_2) می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad (\lambda - 0)^3(\lambda - 1) = 0 \\ &: \quad \lambda^4 - \lambda^3 = 0. \end{aligned}$$

پس عملگر نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^4 - D^3$ و خود معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$Ly = 0 \quad : y^{(4)} - y''' = 0.$$

۳.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = \sin 2x$ و $y_2 = \cos 2x$ جواب آن باشند.

حل: این توابع مستقل خطی‌اند (چرا؟). معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ می‌بایستی دارای ریشه‌های مختلط مزدوج $\lambda = 0 \pm 2i$ باشد، زیرا

$$y_1 = e^{0x}\sin(2x), \qquad y_2 = e^{0x}\cos(2x).$$

چون این ریشه‌ها با تکرار یک هستند، بنابراین

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad (\lambda-(0+2i))(\lambda-(0-2i)) = 0 \\ &: \quad \lambda - 2(0)\lambda + ((0)^2+(2)^2) = 0 \\ &: \quad \lambda^2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

پس عملگر L نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^2 + 4$ و معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\mathscr{E} \,:\, y'' + 4y = 0.$$

۴.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که $y_1 = x^2 \sin x$، $y_2 = -\cos x$ و $y_3 = 2x\cos x$ جوابهای آن باشند.

حل: این توابع مستقل خطی هستند و به علاوه می‌توان نوشت:

$$y_1 = x^2 e^{0x}\sin(10x), \quad y_2 = (-1)e^{0x}\cos(10x), \quad y_3 = (3)x^1 e^{0x}\cos(1,x).$$

پس معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ دارای جوابهای مختلط $0 \pm i$ با تکرار سه است. بنابراین $C_{\mathscr{E}}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \{(\lambda-(0+i))(\lambda-(0-i))\}^3 = 0, \\ &: \quad \{\lambda^2+1\}^3 = 0, \\ &: \quad \lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

پس عملگر L بیه به $\mathscr{E}$ عبارتست از $L = D^6 + 3D^4 + 4D^2 + 1$ و معادله $\mathscr{E}$ نیز چنین است:

$$\mathscr{E} \,:\, y^6 + 3y^{(4)} + 3y^{(2)} + y = 0.$$

۵.۶.۲. مثال معادله‌ای بیابید که توابع زیر جواب آن باشند:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x\sin 2x, \quad y_4 = 2e^x - xe^{-x} + \sin 2x.$$

حل: جمله $2e^x$ در y_4 را با y_1 می‌توان تولید کرد. بعلاوه، اگر $y_4 = x^2e^{-x}$ جواب معادله‌ای باشد، آنگاه توابع e^{-x} و xe^{-x} نیز جواب آن هستند و لذا جمله دوم در y_4 را نیز می‌توان با حضور y_2 منتفی است. پس، در بحث لازم نیست y_4 گنجانده شود. از طرفی y_1 نظیر به $\lambda_1 = 1$ با تکرار یک، y_2 نظیر $\lambda_2 = -1$ با تکرار ۳ و y_3 نظیر $\lambda_3 = 0 \pm 2i$ با تکرار دو است. پس معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}}$ معادله مورد نظر $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}} \,:\, (\lambda - 1^1(\lambda+1)^3(\lambda^2+4)^2 = 0.$$

و لذا عملگر L نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} L \quad &= \quad (D-1)(D+1)^3(D^2+4)^2, \\ &= \quad (D^2-1)(D^2+2D+1)(D^4+8D^2+14). \end{aligned}$$

معادله $\mathscr{E}$ به صورت $Ly = 0$ می‌باشد.

۶.۶.۲. تمرینات در هر مورد معادله‌ای خطی و با ضرایب ثابت بیابید که توابع داده شده جواب آن باشند و مرتبه معادله حداقل مقدار ممکن باشد.

1) $e^{-x},\ e^{x},$	2) $e^{x},\ xe^{x},\ x^2e^{x},$
3) $1,\ e^{x},$	4) $e^{x},\ xe^{x},\ e^{2x},$
5) $e^{-2x},\ xe^{-2x},$	6) $1,\ x^3,\ e^{x},$
7) $e^{2x},\ e^{2x}\sin x,\ \cos 4x,$	8) $1,\ \sin x,\ \cos x,$
9) $10,\ xe^{x},\ -x^2e^{x},$	10) $1+x,\ x^2,\ e^{-x}.$

در هر مورد معادله خطی همگن با ضرایب ثابت و با درجه حداقل ۲ را طوری بیابید که رتبه‌های آن به شرح داده شده باشند:

۱۱) $\lambda_1 = 0$ با تکرار دو و $\lambda_2 = -1$ با تکرار یک.

۱۲) $\lambda_1 = 1$ با تکرار سه و $\lambda_2 = 1 \pm i$ با تکرار یک.

۱۳) $\lambda_1 = 2 \pm i$ با تکرار دو.

۱۴) $\lambda_1 = 0 \pm 2i$ با تکرار سه و $\lambda_2 = 2$ با تکرار یک.

۱۵) $\lambda_1 = \pm i$ با تکرار دو و $\lambda_2 = 1 \pm 2i$ با تکرار دو.

۱۶) نشان دهید که اگر $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابع مستقل خطی باشند، آنگاه معادله همگنی که از حداقل مرتبه است و این توابع جواب آن هستند، عبارتست از $W(y, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$. به بیان دیگر

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_n \\ y' & y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

۱۷) نشان دهید معادله مشخصه معادله همگنی که $x^n e^{x}\cos bx$ و $x^n e^{ax}\sin bx$ در آن صدق می‌کنند عبارتست از $\left(\lambda^2 - 2\lambda + a^2 + b^2\right)^{n+1} = 0$.

بخش ۷.۲ روش ضرایب نامشخص برای یافتن جواب خصوصی

در این قسمت روشی مطرح می‌گردد که طی آن برای معادلات خطی با ضرایب ثابتی که طرف ثانی آنها به شکل:

$$ax^n e^{bx}\cos cx, \qquad ax^n e^{bx}\sin cx,$$

و با مجموع آنها است، جواب خصوصی تعیین می‌کنیم.

۱.۷.۲. روش حل فرض کنید $\mathscr{E} : Ly = f$ یک معادله خطی با ضرایب ثابت باشد و M عملگری باشد که $Mf = 0$. در این صورت $LMy_p = 0$ یعنی y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ یک جواب از معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ است. بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ را یافته و جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ را از آن کم می‌کنیم. پس جملات مانده را به عنوان کاندیدی برای y_p انتخاب می‌کنیم. اکنون به منظور یافتن ضرایب مجهول در y_p آن را در معادله $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم.

۲.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''+y=x+1$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h: y''+y=0$ که عملگر نظیر به آن $L=D^2+1$ است. معادله مشخصه $\mathscr{E}$ عبارتست از $\lambda^2+1=0$ که دارای ریشه‌های $0\pm 1i$ است، پس جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_n=A\sin x+B\cos x$. از $f=x+1$ جواب معادله $\mathscr{E}': y''=0$ است که عملگر نظیر به آن $M=D^2$ است. بنابراین، اگر y_p یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ باشد، باید MLy_p. اما جواب عمومی معادله $\mathscr{E}_p: MLy=0$. باید بدست آید. معادله مشخصه آن عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}p}: \lambda^2(\lambda^2+1)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=i, \lambda_4=-i.$$

پس جواب عمومی آن به شکل $Ax+B+C\sin x+D\cos x$ است. اما جملات $\cos x$ و $\sin x$ در y_p چنین است: $y_p=Ax+B$. یافتن B و A این تابع y_p را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$(0)+(Ax+B)=x+1.$$

پس $A=1$ و $B=1$ بنابراین $y_p=x+1$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: y=y_p+y_h=x+1+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

۳.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''-5y'+6y=\sin x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h=Ly=0$ که $L=D^2-5D+0$. معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}: \lambda^2-5\lambda+6=0$ است که ریشه‌های آن $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=3$ هستند. بنابراین، جواب عمومی همگن عبارتست از: $y_h=Ae^{2x}+Be^{3x}$.

از طرفی $f=\sin x$ جواب معادله $y''+y=0$ است که عملگر نظیر به آن $M=D^2+1$ است. پس، جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله $\mathscr{E}_p: LMy=0$ صدق می‌کند. اما معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}_p$ عبارتست از $(D^2-5D+6)(\lambda^2+1)=0$ که ریشه‌های آن i، $-i$، ۳ و ۲ هستند. بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$A\sin x+B\cos x+Ce^{2x}+De^{3x}.$$

اما جملات e^{2x} و e^{2x} در y_k ظاهر شده‌اند، پس شکل کلی جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ عبارتست از $y_p=A\sin x+B\cos x$. به منظور یافتن ثابتهای A، B تابع y_p را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{gathered}(-A\sin x-B\cos x)-5(A\cos x-B\sin x)+6(A\sin x+B\cos x)=\sin x\\ \Rightarrow\begin{cases}5A+5B=1\\ A+5B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-5B\\ -20B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/4\\ B=-1/20\end{cases}\end{gathered}$$

پس $y_p=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{20}\cos x$ جواب خصوصی $\mathscr{E}$ است. در نتیجه، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: y=y_p+y_h=\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{20}\cos x+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

۴.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''-4y=x+e^{-x}$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h: Ly=0$ که $L=D^2-4$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}: \lambda^2=4$ است. پس، جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h=Ae^{-2x}+Be^{2x}$.

از طرفی $f_1=e^{-x}$ در معادله $(D+1)y=0$ و $f_1=x$ در معادله $D^2y=0$ صدق می‌کند. پس $y=f+f_2=x+e^{-x}$ در معادله $D^2(D+1)y=0$ صدق می‌کند که عملگر نظیر به آن $M=D^2(D+1)$

است. بنابراین خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p \,:\, LMy=0$ صدق می‌کند. اما، معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}\,p} \,:\, \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$ است. پس جواب عمومی آن عبارتست از

$$A+Bx+Ce^{-x}+De^{2x}+Ee^{-2x},$$

که جملات e^{2x}, e^{-2x} در y_h ظاهر شده‌اند. پس شکل کلی y_p چنین است:

$$(0+0+Ce^{-x})-4(A+Bx+Ce^{-x})=x+e^{-x}$$

$$\begin{cases} -4A=0 \\ -4B=1 \\ -3C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1/4 \\ C=-1/3 \end{cases}$$

در نتیجه $y_p=-\frac{1}{4}x+-\frac{1}{3}e^{-x}$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S}\,:\, y &= y_p+y_h \\ &= -\frac{x}{4}-\frac{e^{-x}}{3}+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}. \end{aligned}$$

۵.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y'''-y''=12x^2+6x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h \,:\, Ly=0$ که $L=D^3-D^2$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}} \,:\, \lambda^3-\lambda^2=0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن عبارتست از $y_h=A+Bx+Ce^x$ زیرا ریشه‌های آن $\lambda_1=0$ با تکرار ۲ و $\lambda_2=0$ با تکرار یک است.

از طرفی $f=12x^2+6x$ یک جواب معادله $D^3y=0$ است که عملگر نظیر به آن $M=D^3$ می‌باشد. پس جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ یک جواب معادله همگن $\mathscr{E}_p \,:\, LMy=0$ است. معادله مشخصه این معادله $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}\,p} \,:\, (\lambda^3-\lambda^2)(\lambda^3)=0 \,:\, \lambda^5(\lambda-1)=0,$$

که ریشه‌های آن $\lambda_1=0$ با تکرار ۵ و $\lambda_2=1$ با تکرار یک است. پس جواب عمومی آن
$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fe^x$

است. اما جملات A، Bx و Fe^x در y_h ظاهر شده‌اند، پس صورت کلی جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p=Cx^2+Dx^3+Ex^4.$$

به منظور یافتن ضرایب y_p آن را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$(0+6D+34Ex)-(2C+6Dx+12Ex^2)=12x^2+6x.$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} -12E=12, \\ 16D+24E=6, \\ -2C+6D=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=-1, \\ D=4E-1=-5, \\ C=3D=-15. \end{cases}$$

بنابراین $y_p=-15-5x-x^2$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S}\,:\, y &= y_p+y_h \\ &= -x^2-5x-15+C_1+C_2x+C_3e^x. \end{aligned}$$

۶.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y'' + y' = 4x^2e^x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ که $L = D^2 + D$ و معادله مشخصه آن : $C_{\mathscr{E}}$ $\lambda^2 + \lambda = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن $y_h = A + Be^{-x}$ است، زیرا ریشه‌های $C_{\mathscr{E}}$ عبارت از $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = -1$ هستند.

از طرفی $f = 4x^2e^x$ به یک ریشه $\lambda = 1$ با تکرار $m = 2 + 1$ نظیر است، پس جواب معادله $My = 0$ است که $M = (D-1)^3$. بنابراین، جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ یک جواب معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ است که معادله مشخصه آن:

$$C_{\mathscr{E}p} : (\lambda^2 + \lambda)(\lambda - 1)^3 = 0 : \lambda(\lambda-1)^3(\lambda+1) = 0,$$

است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$A + Be^x + Cxe^x + Dx^2e^x + Ee^{-x},$$

که جملات A و Ee^{-x} ظاهر شده‌اند. بنابراین، شکل کلی جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = Be^x + Cxe^x + Dx^2e^x.$$

به منظور یافتن ضرایب y_p، آن را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
&\left\{Be^x + C(2+x)e^x + D(e^x + 4x + 2)e^x\right\} + \\
&\quad + \left\{Be^x + C(x+1)e^x + D(x^2 + 2x)e^x\right\} = 4x^2e^x, \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2B + 3C + 2D = 0, \\ 2C + 6D = 0, \\ 2D = 4, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} B = -D - \frac{3}{2}C = 7, \\ C = -3D = -6, \\ D = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

بنابراین $y_p = (2x^2 - 6x + 7)e^x$ و لذا جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} : y &= y_p + y_h \\
&= (2x^2 - 6x + 7)e^x + C_1 + C_2e^{-x}.
\end{aligned}$$

۷.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ که $L = D^2 + 10D + 25$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = Ae^{-5x} + Bxe^{-5x}$ زیرا $C_{\mathscr{E}}$ ریشه $\lambda = -5$ با تکرار ۲ دارد.

از طرفی، $f = 4e^{-4x}$ جواب معادله $(D+5)y = 0$ است که عملگر آن $M = D + 5$ می‌باشد. پس جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ صدق می‌کند. اما معادله مشخصه معادله $\mathscr{E}_p$

$$C_{\mathscr{E}p} : (\lambda + 5)(\lambda^2 + 10\lambda + 25) = 0,$$

است؛ یا $(\lambda+5)^3 = 0$ که دارای ریشه $\lambda = -5$ با تکرار ۳ است. پس جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$Ae^{-5x} + Bxe^{-5x} + Cx^2e^{-5x},$$

که جملات Ae^{-5x}، Bxe^{-5x} در y_h حاضرند، بنابراین صورت کلی جواب خصوصی y_p عبارتست از

$$y_p = Cx^2e^{-5x}.$$

به منظور یافتن C، مقدار y_p را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\{(25x^2-20x+2)e^{-5x}+10(2x-5x^2)e^{-5x}+25x^2e^{-5x}\}C = 4e^{-5x}.$$

پس $2C = 4$ یا $C = 2$ و $y_p = 2x^2e^{-5x}$. پس جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}\,:\,y &= y_p+y_h\\ &= C_1e^{-5x}+C_2xe^{-5x}+2x^2e^{-5x}.\end{aligned}$$

اگر در طرف ثانی یک معادله خطی با ضرایب ثابت جملاتی به شکل $ax^he^{bx}\cos cx$ و یا $ax^ne^{bx}\sin cx$ حاضر باشد، یافتن ضرایب مجهول y_p کار دشواری است، برای حل این مشکل از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

۸.۷.۲. قضیه *اگر $Ly = f_1(x)+if_2(x)$ یک معادله خطی با ضرایب حقیقی باشد و $y = u(x)+iv(x)$ جوابی از آن باشد، آنگاه $u(x)$ یک جواب معادله $Ly = f_1(x)$ و $v(x)$ یک جواب معادله $LY = f_2(x)$ است.*

۹.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\,:\,y''+y = x\cos x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\mathscr{E}_h\,:\,Ly = 0$ است که $L = D^2+1$ و معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}\,:\,\lambda^2+1 = 0$ است. بنابراین، جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = A\sin x+B\cos x$.

از طرفی $f = x\cos x$ به ریشه $0\pm 1i$ با تکرار $2 = 1+1$ متناظر است و لذا جوابی از معادله $(D^2+1)^2y = 0$ است. عملگر این معادله $M = (D^2+1)^2$ است و لذا y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p\,:\,LMy = 0$ است. معادله مشخصه $\mathscr{E}_p$ عبارت از

$$C_{\mathscr{E}p}\,:\,(\lambda^2+1)^2(\lambda^2+1) = 0\,:\,(\lambda^2+1)^3 = 0,$$

است که ریشه‌های $0\pm 1i$ با تکرار سه دارد. بنابراین جواب عمومی $\mathscr{E}_p$ عبارتست از

$$A\sin x+B\cos x+Cx\sin x+Dx\cos x+Ex^2\sin x+Fx^2\cos x,$$

که جملات $B\cos x$ و $A\sin x$ در y_h حاضرند، پس شکل کلی جواب خصوصی y_p چنین است:

$$y_p = Cx\sin x+Dx\cos x+Ex^2\sin x+Fx^2\cos x.$$

به جای اینکه y_p را در $\mathscr{E}$ قرار دهیم، توابع y_2 و y_i را قرار می‌دهیم که:

$$\begin{cases} y_r = Dx\cos x+Fx^2\cos x = (Dx+Fx^2)\cos x,\\ y_i = Cx\sin x+Ex^2\cos x = (Cx+Ex^2)\sin x.\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که $y_r = \mathrm{Re}\left\{\left(Dx+Fx^2\right)e^{xi}\right\}$ و $y_i = \mathrm{Im}\left\{\left(Cx+Ex^2\right)e^{xi}\right\}$. بنابراین به جای یافتن جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$، جواب خصوصی z_p معادله مختلط $z''+z = xe^{ix}$ را می‌یابیم که به شکل $z_p = (ax+bx^2)e^{xi}$ است و a,b اعداد مختلط‌اند. پس z_p را در این معادله قرار می‌دهیم:

$$\{-bx^2+(4b-a)x+(2b+2ai)\}e^{xi}+\{bx^2+ax\}e^{xi} = xe^{xi}.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4b = 1 \\ 2b + 2ai = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = ib = \frac{i}{4} \end{cases}$$

پس z_p جواب خصوصی معادله $z'' + z = xe^{ix}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} z_p &= (\frac{1}{4}x + \frac{i}{4}x^2)e^{xi} \\ &= \frac{x}{4}(1+xi)(\cos x + i\sin x) \\ &= \frac{x}{4}((\cos x - x\sin x) + (\sin x + x\cos x)i) \\ &= \frac{1}{4}(x\cos x - x^2\sin x) + \frac{1}{4}(x\sin x + x^2\cos x)i. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به ۸.۷.۲ و اینکه طرف ثانی معادله $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی xe^{xi} است، پس y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی جواب خصوصی z_p معادله $z'' + z = xe^{xi}$ است:

$$\begin{aligned} y_p &= \mathrm{Re}(z_p) \\ &= \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2\sin x. \end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : y &= y_p + y_h \\ &= \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x. \end{aligned}$$

۱۰.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' - 6y' + 9y = 25e^x\sin x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ است که $L = D^2 - 6D + 9$ و معادله مشخصه $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ است که ریشه $\lambda = 3$ با تکرار ۲ دارد. پس جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از

$$y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}.$$

از طرفی تابع $f = 25e^x\sin x$ به ریشه‌های مختلط $1 \pm 1i$ با تکرار یک متناظر است و لذا جواب معادله $My = 0$ یا

$$\begin{aligned} M &= D^2 - 2(1)D + ((1)^2 + (1)^2) \\ &= D^2 - 2D + 2, \end{aligned}$$

می‌باشد. پس جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p : LMy = 0$ صدق می‌کند که دارای معادله مشخصه:

$$C_{\mathscr{E}p} : (\lambda - 3)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0,$$

است. جواب عمومی معادله $\mathscr{E}_p$ چنین است:

$$Ae^{-3x} + Bxe^{3x} + Ce^x\sin x + De^x\cos x,$$

که جملات Ae^{3x} و Bxe^{3x} در y_h حضور دارند. پس شکل کلی خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = Ce^x \sin x + De^x \cos x.$$

ما به جای y_p از $y_r + iy_i$ استفاده می‌کنیم که $y_r = De^x \cos x$ و $y_i = Ee^x \sin x$. اما با توجه به اینکه $e^x \cos x = \mathrm{Re}\left(e^x e^{xi}\right)$ و $e^x \sin x = \mathrm{Im}\left(e^x e^{xi}\right)$، به جای قرار دادن y_i و y_r در $\mathscr{E}$ کافی است:

$$z_p = ae^x e^{xi} \quad (a\text{عدد مختلط است})$$

را در معادله دیفرانسیل $z'' - 6z' + 9z = 25e^x e^{xi}$ قرار می‌دهیم، در نتیجه:

$$a(1+i)^2 e^{(1+i)x} - 6a(1+i)e^{(1+i)x} + 9ae^{(1+i)x} = 25e^{(1+i)x}.$$

یا به بیان دیگر داریم:

$$a(2i) - 6a(1+i) + 9a = 25.$$

بنابراین $a = 3 + 4i$ و

$$\begin{aligned} z_p &= ae^{(1+i)x} = (3+4i)e^x e^{xi} \\ &= e^x(3+4i)(\cos x + i\sin x) \\ &= (3\cos x - 4\sin x)e^x + (3\sin x + 4\cos x)e^x i. \end{aligned}$$

چون طرف ثانی $\mathscr{E}$ قسمت موهومی طرف ثانی معادله مختلط $z'' - 7z' + 9z = 25e^x e^{xi}$ است، جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_p = lm(z_p) = (3\sin x + 4\cos x)e^x,$$

و بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : y &= y_p + y_h \\ &= (3\sin x + 4\cos x)e^x + Ae^{3x} + Be^{3x}. \end{aligned}$$

۱۱.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$ را حل کنید.

حل: معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\mathscr{E}_h : Ly = 0$ است که در آن $\mathscr{L} = D^2 + 2D + 5$ ومعادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}} : \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ با ریشه‌های مختلط $-1 \pm 2i$ با تکرار یک است. پس جواب عمومی معادله همگن $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = Ae^{-x}\sin 2x + Be^{-x}\cos 2x$.

از طرفی $f = e^{-x}\cos 2x$ یک جواب از معادله همگن $My = 0$ است که $M = L$. بنابراین، y_p جواب خصوصی $\mathscr{E}$ در معادله همگن $\mathscr{E}_p = \mathscr{L}^2 y = 0$ صدق می‌کند. معادله مشخصه $\mathscr{E}_p$ عبارتست از $C_{\mathscr{E}p} : (\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2 = 0$ که دارای جواب عمومی:

$$Ae^{-x}\sin 2x + Be^{-x}\cos 2x + Cxe^{-x}\sin 2x + Dxe^{-x}\cos 2x.$$

است. اما جملات $Ae^{-x}\sin 2x$ و $Be^{-x}\cos 2x$ در y_p حاضرند، پس صورت کلی جواب عمومی y_p معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$y_p = Cxe^{-x}\cos 2x + Dxe^{-x}\sin 2x.$$

به جای قرار دادن y_p در $\mathscr{E}$ تابع $z_p = axe^{-x}e^{2xi}$ را در معادله دیفرانسیل $z'' + 2z' + 5z = e^{-x}e^{2xi}$ قرار می‌دهیم، زیرا طرف ثانی معادله $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی $e^{-x}e^{2xi}$ است. حاصل چنین است:

$$a\{(-2)+2i)-(3+4i)x\}e^{-x}e^{2xi} + 2a\{1+(-1+2i)x\}e^{-x}e^{2xi} + 5axe^{-x}e^{2xi} = e^{-x}e^{2xi}.$$

بنابراین، داریم $4ai = 1$ یا $a = -\frac{i}{4}$ و لذا

$$\begin{aligned} z_p &= axe^{-x}e^{2xi} \\ &= -\frac{i}{4}xe^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x) \\ &= \frac{x}{4}e^{-x}(\sin 2x - i\cos 2x). \end{aligned}$$

چون طرف ثانی $\mathscr{E}$ قسمت حقیقی طرف ثانی معادله دیفرانسیل $z'' + 2z' + 5z = e^{-x}e^{2xi}$ است، بنابراین بنا به ۸.۷.۲ داریم:

$$\begin{aligned} y_p &= \mathrm{Re}(z_p) \\ &= \frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x, \end{aligned}$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : y &= y_p + y_h \\ &= \frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x + C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x. \end{aligned}$$

۱۲.۷.۲. تمرینات در هر مورد شکل جواب خصوصی معادله خطی با ضرایب ثابت $\mathscr{E}$ با طرف ثانی f و ریشه‌های λ_i داده شده را بیابید:

1)	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,$	$f = ax^2 + bx + c,$
2)	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,$	$f = ax^2 + bx + c,$
3)	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$	$f = ax^2 + bx + c,$
4)	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,$	$f = e^{-x}(ax + b),$
5)	$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,$	$f = e^{-x}(ax + b),$
6)	$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,$	$f = e^{-x}(ax + b),$
7)	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,$	$f = a\sin x + b\cos x,$
8)	$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,$	$f = a\sin x + b\cos x,$
9)	$\lambda_1 = -1-i,\ \lambda_2 = -1+i,$	$f = e^{-x}(a\cos x + b\sin x),$
10)	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$	$f = ax + e^{-x},$
11)	$\lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_2 = -i,$	$f = \sin x,$
12)	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1+i,\ \lambda_3 = \lambda_2 = 1-i,\ \lambda_5 = 0,$	$f = e^x\cos x,$

هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

13) $y''+3y'=3,$
14) $y''+7y'=e^{-2x},$
15) $y''+3y'=e^{x},$
16) $y''-10y'+25y=e^{5x},$
17) $y''+16y=\sin(4x+\alpha),$
18) $y''+25y=\cos 5x,$
19) $y^{(4)}-y=1,$
20) $y''+ky=x,$
21) $y^{(4)}-y'=2,$
22) $y'''+y''=1,$
23) $y^{(5)}-y'''=4,$
24) $y''+2y'+2y=1+x,$
25) $y''+2y'+y=-2,$
26) $7y''-y'=14x,$
27) $y''+9y'+2=0,$
28) $y''+3y'=3xe^{-3x},$
29) $5y'''-7y''-3=0,$
30) $y''+8y'=8x,$
31) $y''+a^2y=2\cos mx+3\sin mx,\ m\neq a,$
32) $y'''-y''+y'-y=x^2+x,$
33) $y^{(4)}-y'''+2y''-2y'+y=e^{x},$
34) $y'''-3y''+3y'-y=e^{x}\cos 2x,$
35) $y''-4y'+5y=e^{2x}(\sin x+2\cos x),$
36) $y^{(6)}+3y^{(4)}+3y''+y=\sin x.$

در برخی مسائل طرف ثانی جمع دو یا چند جمله است، این گونه مسائل را به دو یا چند مساله ساده‌تر می‌توان تقسیم نمود.

۱۳.۷.۲. قضیه (قضیه برهمنهی) *فرض کنید $\mathscr{E}_i : Ly=f_i$ که $i=1,2,\cdots,k$ معادلات دیفرانسیل خطی هستند و $y_{p,i}$ جواب خصوصی $\mathscr{E}_i$ است، در این صورت تابع $y_p=y_{p,1}+y_{p,2}+\cdots+y_{p,k}$ یک جواب خصوصی معادله زیر است:*

$$\mathscr{E} : Ly=f_1+f_2+\cdots+f_k.$$

۱۴.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E} : y''-6y'+9y=4e^{x}-16e^{3x}$ را حل کنید.

حل: جواب عمومی معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $y_h=Ae^{3x}+Bxe^{3x}$ زیرا معادله مشخصه آن دارای ریشه تکراری ۳ است. برای یافتن جواب خصوصی $\mathscr{E}$، یک جواب خصوصی $y_{p,1}$ برای معادله:

$$\mathscr{E} : y''-6y'+9y=4e^{x},$$

و یک جواب خصوصی $y_{p,2}$ برای معادله:

$$\mathscr{E}_2 : y''-6y'+9y=-16e^{2x},$$

می‌یابیم. چنانچه همانند در مثال ۹.۷.۲ عمل کنیم، نتیجه خواهد شد:

$$y_{p,1}=e^{x} \qquad y_{p,2}=-8x^2e^{3x}.$$

بنابراین یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p,1}+y_{p,2} \\ &= e^{x}-8x^2e^{3x}, \end{aligned}$$

و لذا جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y=Ae^{3x}+Bxe^{3x}+e^{x}-8x^2e^{3x}.$$

۱۵.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''' - 2y'' + 2y' = 4\cos x\cos 3x + 6\sin^2 x$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه $\mathscr{E}$ عبارت از $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$ است که ریشه‌های آن $-i, i, 0$ هستند. لذا جواب عمومی معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_h = A + B\sin x + B\cos x.$$

به جای یافتن جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$، جواب خصوصی معادله زیر را می‌یابیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1 &: \quad y''' - 2y'' + 2y' = 2\cos 4x,\\ \mathscr{E}_2 &: \quad y''' - 2y'' + 2y' = -\cos 2x,\\ \mathscr{E}_3 &: \quad y''' - 2y'' + 2y' = 3.\end{aligned}$$

زیرا ملاحظه می‌گردد که

$$4\cos x\cos 3x + 6\sin^2 x = 2\cos 4x - \cos 2x + 3.$$

چنانچه به روش ۹.۷.۲ جواب خصوصی این سه معادله ساده‌تر را بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned}y_{p,1} &= \frac{1}{65}\left(\cos 4x - \frac{7}{4}\sin 4x\right),\\ y_{p,2} &= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x\right),\\ y_{p,3} &= \frac{3}{2}x.\end{aligned}$$

بنابراین یک جواب خصوصی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned}y_p &= y_{p,1} + y_{p,2} + y_{p,3},\\ &= \frac{1}{65}\cos 4x - \frac{7}{260}\sin 4x + \frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{3}{2}x,\end{aligned}$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است: $\mathscr{E}: y = y_p + y_h$.

۱۶.۷.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \sin x$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ است که دارای ریشه‌های ۱ و ۲ با تکرار یک است. بنابراین، جواب عمومی همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_h = Ae^x + Be^{2x}.$$

به جای یافتن جواب خصوصی y_p معادله $\mathscr{E}$، جواب خصوصی هر یک از معادلات زیر را به روش ۹.۷.۲ می‌یابیم:

$$\mathscr{E}_1: y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} \qquad \mathscr{E}_2: y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

نتیجه، به ترتیب چنین خواهد بود:

$$y_{p,1} = \frac{x^2}{2}e^{2x} - xe^{2x}, \qquad y_{p,2} = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x.$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

بنابراین یک جواب خصوصی y_p چنین است: $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : y &= y_p + y_h \\ &= \frac{x^2}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x + Ae^x + Be^{2x}. \end{aligned}$$

۱۷.۷.۲. تمرینات هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

1) $y'' - y' - 2y = 1 + 4x - 2e^x,$
2) $y'' - 2y' + y = 18x + x^2 + e^x \sin x,$
3) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x,$
4) $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x},$
5) $y'' - 2y' + 5y = e^x(1 - 2\sin^2 x) + 10x + 1,$
6) $y'' + 6y' + 9y = 18e^{-2x} + 8\sin x + 6\cos x,$
7) $y''' - 2y'' + y' = 4x + 3\sin x - \cos x + e^{-x}.$

بخش ۸.۲ روش عملگرهای معکوس برای یافتن جواب خصوصی

روش عملگرهای معکوس، یکی از روشهای متعدد برای یافتن جواب خصوصی یک معادله خطی با ضرایب ثابت است. در این روش نیز باید طرف ثانی معادله به شکل $ax^n e^{bx} \cos cx$ یا $ax^n e^{bx} \sin cx$ و یا مجموعی از آنها باشد.

۱.۸.۲. تعریف فرض کنید L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت است و $L(q(x)) = p(x)$. در این صورت می‌نویسیم

$$L^{-1}(p(x)) = q(x)$$

و L^{-1} را **عملگر معکوس** می‌نامیم. به بیان دیگر، $L^{-1} f(x)$ جواب خصوصی معادله $Ly = f(x)$ است که در آن هیچ یک از جملات جواب معادله همگن $\mathscr{E}_h$ وجود ندارد. بعلاوه، ترکیب $L^{-1}L = LL^{-1}$ بدیهی است.

۲.۸.۲. مثال اگر $L = D^2 + 1$ و $f(x) = x^2$، آنگاه

$$L^{-1} f = x^2 - 2.$$

زیرا جواب عمومی معادله $Ly = f$ یا $y'' + y = x^2$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = x^2 - 2 + A\sin x + B\cos x.$$

۳.۸.۲. مثال اگر $L = D^2 - D - 2$ و $f = e^x$، آنگاه

$$L^{-1} f = -\frac{1}{2}e^x.$$

زیرا جواب عمومی معادله $Ly = f$ یا $y'' - y' - 2y = e^x$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = Ae^{-x} + Be^{2x} - \frac{1}{2}e^x.$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

۴.۸.۲. قضیه

۱) اگر $p(x)$ یک تابع باشد، آنگاه $D^{-n}p(x)$ عبارتست از انتگرال گیری پی در پی از $p(x)$ به تعداد n بار و حذف ثابت در هر مرحله.

۲) اگر $p(x) = bx^k$، آنگاه

$$\frac{1}{D-a_0}(bx^k) = -\frac{1}{a_0}\left\{1+\frac{D}{a_0}+\frac{D^2}{a_0^2}+\cdots+\frac{D^k}{a_0^k}\right)(bx^k),$$

۳) اگر $p(x) = be^{ax}$، L یک عملگر خطی با ضرایب ثابت باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{L(D)}(be^{ax}) = \frac{b}{L(a)}e^{ax},$$

توجه شود که $L(a)$ یعنی همان عملگر $L(D)$ که هر جا D بوده است، از a استفاده کرده‌ایم. بعلاوه فرض شده است که $L(a)\neq 0$.

۴) اگر $L(D)$ یک عملگر خطی با ضرایب ثابت باشد، آنگاه

$$\frac{1}{L(D)}p(x)e^{ax} = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}p(x),$$

۵) اگر $L(D)$ عملگری خطی و با ضرایب ثابت باشد، طوری که $L(D) = (D-a)^r M(D)$ که $M(a)\neq 0$، در این صورت

$$\frac{1}{L(D)}be^{ax} = \frac{b}{r!M(a)}x^r e^{ax},$$

۶) اگر L عملگری خطی باشد، L^{-1} نیز هست، بنابراین

$$\frac{1}{L}(af+bg) = a\frac{1}{L}f + b\frac{1}{L}g.$$

۵.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۱ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned} D^{-2}(2x+3) &= \int\int(2x+3)\,dx\,dx \\ &= \int(x^2+3x)\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}. \end{aligned}$$

۲.۸.۶. مثال مانند مثال قبل داریم:

$$\begin{aligned}
D^{-4}(24+e^{-x}) &= D^{-3}\int(24+e^{-x})\,dx\\
&= D^{-3}(24x-e^{-x})\\
&= D^{-2}\int(24x-e^{-x})\,dx\\
&= D^{-2}(12x^2+e^{-x})\\
&= D^{-1}\int(12x^2+e^{-x})dx\\
&= D^{-1}(4x^3-e^{-x})\\
&= \int(4x^3-e^{-x})\,dx\\
&= x^4+e^{-x}.
\end{aligned}$$

۲.۸.۷. مثال بنا به قسمت ۲ از ۲.۸.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-2D-3}(5x^2) &= \frac{1}{D+1}\cdot\frac{1}{D-3}(5x^2)\\
&= \frac{1}{D+1}\left(-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{D}{3}+\frac{D^2}{9}\right\}(5x^2)\right)\\
&= \frac{1}{D+1}\left(-\frac{1}{3}\left\{5x^2+\frac{10}{3}x+\frac{10}{9}\right\}\right)\\
&= \frac{-5}{3}\left(-\frac{1}{-1}\left\{1+\frac{D}{-1}+\frac{D^2}{(-1)^2}\right\}\right)\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)\\
&= -\frac{5}{3}\left(\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)-\left(2x+\frac{2}{3}\right)+(2)\right)\\
&= -\frac{5}{3}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{14}{9}\right)\\
&= -\frac{5}{27}(9x^2-12x+14).
\end{aligned}$$

۲.۸.۸. مثال یک جواب خصوصی معادله $y''-2y'=2x$ را بیابید.

حل: با توجه به قسمت ۲ از ۴.۸.۲ داریم:

$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-2D}(2x) \\
&= \frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{D}(2x) \\
&= \frac{1}{D-2}(\int 2x dx) \\
&= \frac{1}{D-2}(x^2) \\
&= \frac{-1}{2}\left\{1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}\right\}(x^2) \\
&= \frac{-1}{2}\left\{x^2+x+\frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\{2x^2+2x+1\}.
\end{aligned}
$$

۲.۸.۹. مثال با توجه به قسمت ۲ از ۲.۸.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^5-D^3}(2x^2) &= \frac{1}{D^3}.\frac{1}{D+1}.\frac{1}{D-1}(2x^2)\\
&= 2\frac{1}{D^3}.\frac{1}{D+1}.\left\{-\frac{1}{1}\left(1+\frac{D}{1}+\frac{D^2}{1}\right)\right\}(x^2)\\
&= -2\frac{1}{D^3}.\frac{1}{D+1}(x^2+2x+2)\\
&= 2\frac{1}{D^3}\left\{-\frac{1}{-1}\left\{1+\frac{D}{-1}+\frac{D^2}{1}\right\}\right\}(x^2+2x+2)\\
&= -2\frac{1}{D^3}\left((x^2+2x+2)-(2x+2)+(2)\right)\\
&= -2\frac{1}{D^3}(x^2+2)\\
&= -2\frac{1}{D^2}\int(x^2+2)dx\\
&= -2\frac{1}{D^2}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\\
&= -2\frac{1}{D}\int\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)dx\\
&= -2\frac{1}{D}\left(\frac{x^2}{12}+x^2\right)\\
&= -2\int\left(\frac{x^4}{12}+x^2\right)dx\\
&= -2\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^3}{3}\right)\\
&= -\frac{1}{30}\int(x^5+20x^3).
\end{aligned}$$

۲.۸.۱۰. مثال با توجه به قسمت ۳ از ۲.۸.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^3-D^2-1}(3e^{-2x}) &= \frac{3e^{-2x}}{(-2)^3-(-2)^2+(-2)-1}\\
&= \frac{-3}{13}e^{-2x}
\end{aligned}$$

۱۱.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۳ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-3D+2}3\sin 3x &= \frac{1}{D^2-3D+2}\mathrm{Im}(3e^{3xi})\\
&= 3\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-3D+2}e^{3xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{3xi}}{(3i)^2-3(3i)+2}\right)\\
&= 3\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1-9i}e^{3xi}\right)\\
&= 3\mathrm{Im}\left(\frac{9i-1}{82}(\cos 3x+i\sin 3x)\right)\\
&= \frac{3}{82}\mathrm{Im}((-\cos 3x-9\sin 3x)+(9\cos 3x-\sin 3x)i)\\
&= \frac{3}{82}(9\cos 3x-\sin 3x).
\end{aligned}$$

۱۲.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۳ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\frac{1}{D^2+2D}(\sin x-\sin 2x+5\cos 3x)=f+g+h,$$

که در آن

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{D^2+2D}\sin x\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2+2D}e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i^2+2i}e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2i-1}e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{-1}{3}(1+2i)(\cos x+i\sin x)\right)\\
&= \frac{-1}{3}\mathrm{Im}((\cos x-2\sin x)+(\sin x+2\cos x)i)\\
&= \frac{-1}{3}(\sin x+2\cos x),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{1}{D^2+2D}(-\sin 2x) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2+2D}e^{2xi}\right) \\
&= -\operatorname{Im}\left(\frac{e^{2xi}}{4i^2+4i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-1}e^{2xi}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\operatorname{Im}\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})\right)(\cos 2x+i\sin 2x)\right) \\
&= \frac{1}{8}\operatorname{Im}((\cos 2x-\sin 2x)+(\cos 2x+\sin 2x)i) \\
&= \frac{1}{8}(\cos 2x+\sin 2x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{1}{D^2+2D}(5\cos 3x) \\
&= 5\operatorname{Re}\left(\frac{1}{D^2+2D}e^{3xi}\right) \\
&= 5\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(3i)^2+(3i)}e^{3xi}\right) \\
&= 5\operatorname{Re}\left(\frac{1}{3i-9}e^{3xi}\right) \\
&= \frac{-5}{3}\operatorname{Re}\left(\left(\frac{3}{10}+\frac{i}{10}\right)(\cos 3x+i\sin 3x)\right) \\
&= \frac{-1}{6}\operatorname{Re}((3\cos 3x-\sin 3x)+(8\sin 3x+\cos 3x)i) \\
&= \frac{-1}{6}(3\cos 3x-\sin 3x).
\end{aligned}
$$

۱۳.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۴ از ۴.۸.۲ داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+2D-3}\left(x^2e^{2x}\right) &= e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-2(D+2)-3}x^2 \\
&= e^{2x}\frac{1}{D^2+2D-3}x^2 \\
&= e^{2x}\frac{1}{D+1}\frac{1}{D-3}x^2 \\
&= e^{2x}\frac{1}{D+1}\left\{\frac{-1}{3}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{9}\right)x^2\right\} \\
&= \frac{-1}{3}e^{2x}\frac{1}{D+1}\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right) \\
&= \frac{-1}{3}e^{2x}\left\{\frac{-1}{-1}+\left(1+\frac{D}{-1}+\frac{D^2}{1}\right)\right\}\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right) \\
&= \frac{-1}{3}e^{2x}\left(\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right)-\left(\frac{2}{3}+2x\right)+(2)\right) \\
&= -\frac{1}{3}e^{2x}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{14}{9}\right) \\
&= \frac{-1}{27}e^{2x}(9x^2-12x+14).
\end{aligned}
$$

۱۴.۸.۲. مثال بنا به قسمت ۴ از ۴.۸.۲ داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-D}(x^2e^{-x}\sin x) &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-D}(x^2e^{-x}e^{xi})\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-D}x^2e^{(-1+i)x}\right)\\
&= \left(\mathrm{Im}e^{(-1+i)x}\frac{1}{(D-1+i)^2-(D-1+i)}x^2\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{-x}e^{xi}\frac{1}{D^2+(2i-1)D+(1-3i)}x^2\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{-x}e^{xi}\frac{1}{1-3i}\frac{1}{1-\frac{7+i}{10}D+\frac{1+3i}{10}D^2}x^2\right)\\
&\overset{(1)}{=} e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left\{1+\left(\frac{7+i}{10}D-\frac{1+3i}{10}D^2\right)+\left(\frac{7+i}{10}D-\frac{1+3i}{10}D^2\right)^2+\cdots\right\}x^2\right)\\
&= e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left\{1+\left(\frac{7+i}{10}\right)D-\left(\frac{1+3i}{10}\right)D^2+\left(\frac{7+i}{10}\right)^2D^2+\cdots\right\}x^2\right)\\
&= e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left(x^2+2\frac{7+i}{10}x-\frac{1+3i}{10}2+\left(\frac{7+i}{10}\right)^2 2\right)\right)\\
&= e^{-x}x^2\mathrm{Im}(e^{xi})+e^{-x}x\mathrm{Im}\left(e^{xi}\left(\frac{7+i}{5}\right)\right)+e^{-x}\mathrm{Im}\left(e^{xi}\frac{29-46i}{100}\right)\\
&= e^{-x}x^2\sin x+\frac{1}{5}e^{-x}x\mathrm{Im}((\cos x+i\sin x)(7+i))\\
&\quad +\frac{1}{100}e^{-x}\mathrm{Im}((\cos x+i\sin x)(29-46i))\\
&= e^{-x}x^2\sin x+\frac{1}{5}e^{-x}x(\cos x+7\sin x)+\frac{1}{100}e^{-x}(-46\cos x+49\sin x).
\end{aligned}
$$

توضیح اینکه در (۱) از فرمول زیر استفاده شده است:

$$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+a^3+\cdots$$

۱۵.۸.۲. مثال از تکنیک تفکیک پذیر کسر برای حل برخی مسائل می‌توان استفاده کرد؛ مثلا اگر

$$\frac{1}{D^3-5D^2+8D-4}=\frac{1}{(D-2)^2(D-1)}.$$

فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{(D-2)^2(D-1)}=\frac{A}{D-2}+\frac{B}{(D-2)^2}+\frac{C}{D-1}.$$

در این صورت

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B-4C=0 \\ 2A-B+4C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A \\ B=-A \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=C=-1 \end{cases}$$

در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^3-5D^2+8D-4}xe^{-x} &= \left\{\frac{1}{D-2}+\frac{-1}{(D-2)^2}+\frac{-1}{D-1}\right\}xe^{-x} \\
&= e^{-x}\frac{1}{(D-1)-2}x - e^{-x}\frac{1}{((D-1)-2)^2}x \\
&\quad -e^{-x}\frac{1}{(D-1)-1}x \\
&= e^{-x}\left(-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{D}{3}\right\}\right)x \\
&\quad -e^{-x}\left(-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{D}{3}\right\}\right)^2 x - e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\left\{1+\frac{D}{2}\right\}\right)x \\
&= -\frac{1}{3}e^{-x}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}e^{-x}\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{108}e^{-x}(6x+7).
\end{aligned}$$

۱۶.۸.۲. مثال باتوجه به قسمت ۵ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^3-5D^2+8D-4}(3e^{2x}) &= \frac{1}{(D-2)^2(D-1)}3e^{2x} \\
&= 3\frac{1}{2!(2-1)}x^2e^{2x} \\
&= \frac{3}{2}x^2e^{2x}.
\end{aligned}$$

۱۷.۸.۲. مثال با توجه به قسمت ۵ از ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+1}\sin x &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2+1}e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D-i}\frac{1}{D+i}e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D-i}\frac{e^{xi}}{2i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2i}\frac{1}{1!\mathrm{Im}es1}x^1e^{xi}\right)\\
&= x\mathrm{Im}\left(\frac{-i}{2}e^{xi}\right)\\
&= \frac{-x}{2}\mathrm{Im}(i(\cos x+i\sin x))\\
&= -\frac{x}{2}\cos x.
\end{aligned}$$

۱۸.۸.۲. مثال با توجه به ۴.۸.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+1}x^2\cos x &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{D^2+1}x^2e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(D+i)(D-i)}x^2e^{xi}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{(D+2i)D}x^2\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{D}\left\{\frac{-1}{-2i}\left(1+\frac{D}{-2i}+\frac{D^2}{(-2i)^2}\right)\right\}x^2\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{2i}\left(x^2-\frac{x}{i}-\frac{1}{2}\right)\right\}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{2i}\int(x^2-x/i-1/2)dx\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{xi}\frac{1}{2i}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2i}-\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= \frac{-1}{2}\mathrm{Re}\left((\cos x+i\sin x)\left(\frac{i}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{i}{2}x\right)\right)\\
&= \frac{-1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\cos x+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}\right)\sin x\right)\\
&= \frac{1}{4}x^2\cos x-\frac{x}{12}(2x^2-3)\sin x.
\end{aligned}$$

۱۹.۸.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''-4y'+13y=-xe^{-2x}\sin 3x$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه نظیر به $\mathscr{E}$ عبارت از $\lambda^2-4\lambda+13=0$ است که ریشه‌های مختلط مزدوج $-2\pm 3i$

با تکرار یک دارد. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_h = Ae^{-2x}\sin 3x + Be^{-2x}\cos 3x.$$

برای بدست آوردن جواب خصوصی $\mathscr{E}$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-4D+13}(-xe^{-2x}\sin 3x)\\
&= -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2-4D+13}xe^{-2x}e^{3xi}\right)\\
&= -\mathrm{Im}\left(e^{-2x}e^{3xi}\frac{1}{(D-2+3i)^2-4(D-2+3i)+13}x\right)\\
&= -\mathrm{Im}\left(e^{-2x}e^{3xi}\frac{1}{D}.\frac{1}{D+6i}x\right)\\
&= -e^{-2x}\mathrm{Im}\left(e^{3xi}\frac{1}{D}.\left\{-\frac{1}{-6i}\left(1+\frac{D}{-6i}\right)\right\}x\right)\\
&= -e^{-2x}\mathrm{Im}\left(e^{3xi}\frac{1}{D}.\left(\frac{-i}{6}\left(x+\frac{i}{6}\right)\right)\right)\\
&= \frac{e^{-2x}}{36}\left(ie^{3xi}\int(6x+i)dx\right)\\
&= \frac{e^{-2x}}{36}\left(i(\cos 3x+i\in 3x)(5x^2+ix)\right)\\
&= \frac{e^{-2x}}{36}(3x^2\cos 3x - x\sin 3x).
\end{aligned}$$

بنابراین جواب عمومی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}: y &= y_p + y_h\\
&= \frac{x}{36}e^{-2x}(3x\cos 3x - \sin 3x) + e^{-2x}(A\in 3x + B\cos 3x).
\end{aligned}$$

۲۰.۸.۲. تمرینات حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید:

1) $(D-3)^{-1}(x^2+3x-6)$, 2) $(D-1)^{-1}.x^2$,
3) $(D^2-3D+2)^{-1}.\sin 2x$, 4) $(D^2-1)^{-1}.2x$,
5) $(4D^2-5D)^{-1}(x^2e^{-x})$, 6) $(D^2+1)^{-1}.x\sin x$,

در هر مورد به کمک روش عملگر معکوس، یک جواب خصوصی برای معادله بیابید:

7) $y''+3y'+2y=4$, 8) $y''-y=\sin x$,
9) $y''-y=2x$, 10) $y''-y'=xe^x$,
11) $y''+3y'+2y=\cos x$, 12) $y''+^2y=\cos x$,
13) $y''+y=3e^{-2x}$, 14) $y''+y'+y=3x^2e^x$,
15) $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(2-x^2)$, 16) $y''+4y=4x\cos 2x$,
17) $y^{(4)}+y=x-1$, 18) $y''+y'-2y=3e^{-2x}$,
19) $y'-3y=x^3+3x+e^{3x}$, 20) $y'''+y'=\cos x$,
21) $y^{(5)}+2y'''+y'=2x+\sin x$, 22) $y'''-3y''+3y'-y=2e^x$.

بخش ۹.۲ معادلات اویلر

۱.۹.۲. تعریف معادلات به فرم:

$$\boxed{\mathscr{E}\,:\, a_n(x+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x+b)y' + a_0 y = f(x),} \qquad (۱۷.۲)$$

که $a_n, \cdots, a_1, a_0, b, a$ اعداد ثابتند را **معادلات اویلر** می‌نامیم.

۲.۹.۲. روش حل برای حل معادلات (۱۷.۲) از تغییر متغیر

$$\boxed{x+b=e^t,} \qquad (۱۸.۲)$$

استفاده می‌کنیم که نتیجه یک معادله خطی با ضرایب ثابت بر حسب t و y خواهد بود.

۳.۹.۲. مثال معادله $\mathscr{E}\,:\, x^2y''+2xy'=6y$ را حل کنید.

حل: با توجه به (۱۸.۲) از متغیر جدید t استفاده می‌کنیم که $x=e^t$. در این صورت

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dt})}{e^t} = e^{-t}\left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \qquad y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

اکنون $\mathscr{E}$ را بر حسب t می‌نویسیم:

$$x^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = 6y.$$

به بیان دیگر

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$

که یک معادله خطی با ضرایب ثابت همگن است. معادله مشخصه آن $C_{\mathscr{E}}\,:\,\lambda^2+\lambda-6=0$ است. پس جواب عمومی آن عبارتست از

$$y = y_h = Ae^{-2t} + Be^{2t}.$$

زیرا ریشه‌های $C_{\mathscr{E}}$ اعداد -3 و 2 هستند. اما مطابق فرض $x = e^t$، بنابراین

$$\mathscr{S} \,:\, y = A\frac{1}{x^3} + Bx^2.$$

۴.۹.۲. مثال معادله $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$ را حل کنید.

حل: مانند مثال قبل از متغیر جدید t استفاده می‌کنیم که $x = e^t$، بنابراین شکل جدید معادله $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned} x^2\left\{\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right\} - x\left\{\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right\} + 2y &= e^t\ln e^t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y &= te^t. \end{aligned}$$

معادله مشخصه این معادله خطی عبارتست از $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ که ریشه‌های آن $1 \pm i$ است. پس جواب عمومی معادله همگن آن عبارتست از

$$y_h = Ae^t\cos t + Be^t\sin t.$$

جواب خصوصی آن چنین است:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - 2D + 2}te^t \\ &= e^t\frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 2} \\ &= e^t\frac{1}{D^2+1}t \\ &= e^t\left(1 - D^2 + D^4 - \cdots\right)t \\ &= te^t. \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به اینکه $x = e^t$ جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \,:\, y &= y_p + y_h \\ &= te^t + Ae^t\cos t + Be^t\sin t \\ &= x\ln x + Ax\cos\ln x + Bx\sin\ln x. \end{aligned}$$

۵.۹.۲. مثال معادله $\mathscr{E} \,:\, (3x-2)^2y'' - 3(3x-2)y' + 9y = x$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم t متغیر جدید است و $3x-2=e^t$، در نتیجه

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{1}{3}e^t} = 3e^{-t}\frac{dy}{dt}, \\
y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}(3e^{-t}\frac{dy}{dt})}{\frac{1}{3}e^t} \\
&= 3e^{-t}\left(-3e^{-t}\frac{dy}{dt} + 3e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right).
\end{aligned}$$

پس $\mathscr{E}$ را چنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
(e^t)^2\left(9e^{-2t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right\}\right) - 3e^t\left(3e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) + y &= \frac{e^t+2}{3} \\
\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y &= \frac{e^t+2}{27},
\end{aligned}$$

که یک معادله خطی با ضرایب ثابت با معادله مشخصه $\lambda^2-2\lambda+1=0$ است. چون ریشه‌های این معادله $\lambda_1=\lambda_2=1$ هستند، پس جواب عمومی همگن عبارتست از

$$\begin{aligned}
y_h &= Ae^{1t} + Bt^1e^{1t} \\
&= (A+Bt)e^t.
\end{aligned}$$

جواب خصوصی را به روش زیرتعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-2D+1}\frac{e^t+2}{27} \\
&= \frac{1}{D^2-2D+1}\frac{e^t}{27} + \frac{1}{D^2-2D+1}\frac{2}{27} \\
&= \frac{1}{27}\frac{1}{(D-1)^2}e^t + \frac{2}{27}\frac{1}{D^2-2D+1}1 \\
&= \frac{1}{27}\frac{1}{2!}t^2e^t + \frac{2}{27}(1+2D-D^2+\cdots).1 \\
&= \frac{1}{54}t^2e^t + \frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به اینکه $t=\ln(3x-2)$، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}: y &= y_p + y_h \\
&= \frac{1}{54}t^2e^t + \frac{1}{27} + (A+Bt)e^t \\
&= \frac{3x-2}{54}\ln^2(3x-2) + \frac{1}{27} + (3x-2)(A+B\ln(3x-2)).
\end{aligned}$$

۶.۹.۲. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را حل کنید:

1) $x'y''' + xy' = y,$ 2) $x'y''' = 2y',$
3) $x^2y'' + 3xy' + y = 0,$ 4) $(x+1)^2y''' = 12y',$
5) $x^2y'' + 2xy' + 6y = 0,$ 6) $x^2y'' = 2y + \sin(\ln x),$
7) $x^2y'' + y' = 0,$ 8) $x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{16}{x}\ln x,$
9) $x^2y''' - 3xy'' + 3y = 0,$ 10) $x^2y'' + xy' = y + x^m, \quad |m| \neq 1,$
11) $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0,$ 12) $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0,$
13) $(2x+1)^2y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0,$ 14) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2,$
15) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x,$
16) $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6\ln(x+1).$

بخش ۱۰.۲ روش تغییر پارامتر برای یافتن جواب خصوصی

تاکنون بیشتر معادلات خطی با ضرایب ثابت که سمت راست آنها از فرم بخصوصی است را حل کرده‌ایم. روش حاضر تا حدودی دامنه بحث را گسترش می‌دهیم. این روش را روش لاگرانژ می‌نامند.

۱.۱۰.۲. قضیه *فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ جوابهای مستقل خطی معادله همگن نظیر به معادله دیفرانسیل*

$$\mathscr{E} : p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n y = f(x),$$

هستند. در این صورت جواب عمومی معادله $\mathscr{E}$ به شکل

$$\boxed{y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n,} \tag{۱۹.۲}$$

است. که توابع مجهول C_1، C_2، . . . و C_n از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\boxed{\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' + \cdots + y_nC_n' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + \cdots + y_n'C_n' = 0, \\ \quad\vdots \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \cdots + y_n^{(n-1)}C_n' = \dfrac{f(x)}{p_0(x)}. \end{cases}} \tag{۲۰.۲}$$

۲.۱۰.۲. نتیجه *با مفروضات در ۱.۱۰.۲ و با توجه به قضیه کرامر در جبر خطی، داریم:*

$$\begin{aligned} C_k &= (-1)^{n+k}\frac{f(x)}{p_0(x)}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \\ &\div \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

۳.۱۰.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''-2\tan x.y'=1$ را حل کنید.

حل: ابتدا معادله همگن $\mathscr{E}_h: y''=2y'\tan x$ نظیر به $\mathscr{E}$ را حل می‌کنیم که نسبت به y' و x تفکیک پذیر است: $dy'/y'=2\tan x dx$. بنابراین:

$$\ln y' = -2\ln\cos x+\ln C,$$

یا $y'=\dfrac{C}{\cos^2 x}$ که باز هم نسبت به y و x تفکیک پذیر است: $dy=\dfrac{Cdx}{\cos^2 x}$. بنابراین:

$$y=C\tan x+A,$$

که C و A ثابت دلخواه با $C>0$ هستند. پس $y_1=1$ و $y_2=\tan x$ توابع مستقل خطی و جواب $\mathscr{E}_h$ هستند. اکنون فرض می‌کنیم $y_p=C_1(x)+\tan xC_2(x)$، پس بنا به (۲۰.۲) داریم:

$$\begin{cases} 1.C_1'+\tan x.C_2'=0, \\ 0.C_1'+\dfrac{1}{\cos^2 x}.C_2'=1. \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} C_2'=\cos^2 x, \\ C_1'=-\sin x\cos x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-\displaystyle\int \sin x\cos x dx=-\frac{\sin^2 x}{2}, \\ C_2=\displaystyle\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x. \end{cases}$$

در نتیجه، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S}: y &= A+B\tan x-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{2}x\tan x+\frac{1}{4}\sin 2x\tan x \\ &= A+B\tan x+\frac{1}{2}x\tan x. \end{aligned}$$

۴.۱۰.۲. مثال معادله $\mathscr{E}: y''-3y'+2y=\sin(e^{-x})$ را حل کنید.

حل: ابتدا معادله همگن $\mathscr{E}_h: y''-3y'+2y=0$ نظیر به $\mathscr{E}$ را حل می‌کنیم. معادله مشخصه آن λ^2-

$0 = 3\lambda + 2$ است که ریشه‌های آن ۱ و ۲ هستند. پس جواب عمومی $\mathscr{E}_h$ عبارتست از $y_h = Ae^x + Be^{2x}$.
پس بنا به (۲۰.۲) فرض می‌کنیم:

$$y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}.$$

بنابراین، می‌باید

$$\begin{cases} e^x.C_1' + e^{2x}.C_2' = 0, \\ e^x.C_1' + 2e^{2x}.C_2' = \sin(e^{-x}), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -e^{-x}\sin(e^{-x}), \\ C_2' = e^{-2x}\sin(e^{-x}). \end{cases}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} C_1 &= -\int e^{-x}\sin(e^{-x})dx \\ &= -\cos e^{-x}, \\ C_2 &= \int e^{-2x}\sin(e^{-x})dx \\ &= \int e^{-x}d\cos e^{-x} \\ &= e^{-x}\cos^{-x} - \int \cos e^{-x}de^{-x} \\ &= e^{-x}\cos e^{-x} - \sin e^{-x}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} y_p &= -e^x\cos e^{-x} + e^x\cos e^{-x} - e^{2x}\sin e^{-x} \\ &= -e^{2x}\sin e^{-x}, \end{aligned}$$

و لذا جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} : y = -e^{2x}\cos(e^{2x}\cos(e^{-x}) + Ae^x + B^{2x}.$$

۵.۱۰.۲. مثال در صورتی که بدانیم $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ یک جواب معادله همگن نظیر به معادله

$$\mathscr{E} : y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$$

است. این معادله را حل کنید.

حل: فرض کنیم z تابعی جدید است که $y = y_1 z$ و در $\mathscr{E}_h$ صدق می‌کند. بنابراین اگر در $\mathscr{E}_h$ قرار دهیم، داریم:

$$\begin{gathered} (y_1'' + 2y_1'z' + y_1z'') + \frac{2}{x}(y_1'z + y_1z') + y = 0, \\ \left(y_1'' + \frac{2}{x}y_1' + y_1\right)z + y_1z'' + \frac{2}{x}(xy_1' + y_1)z' = 0. \end{gathered}$$

اما پرانتز اول صفر است، زیرا y_1 در $\mathscr{E}_h$ صدق می‌کند، بنابراین

$$xy_1z'' - 2(xy_1' + y_1)z' = 0;$$

یا پس از ساده کردن، باید $z'' \sin x + 2z' \cos x = 0$ که نسبت به z' و x تفکیک پذیر است:

$$\frac{dz'}{z'} = -2\frac{\cos x}{\sin x}dx.$$

بنابراین $\ln z' = -2\ln\sin x + \ln C$ یا $z' = C/\sin^2 x$ که این نیز تفکیک پذیر است: $dz = Cdx/\sin^2 x$.
بنابراین $z = -C\cot x + A$ که C و A اعداد دلخواهند. در مجموع داریم:

$$\begin{aligned} y &= (-C\cot x + A)\frac{\sin x}{x} \\ &= -C\frac{\cos x}{x} + A\frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

پس می‌توان y_2 را تابع $\cos x/x$ گرفت.
اکنون نظر به (۱۹.۲) فرض می‌کنیم $y_p = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$. پس باید:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}C_1'(x) + \dfrac{\cos x}{x}C_2'(x) = 0, \\ \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}C_1'(x) - \dfrac{x\sin x + \cos x}{x^2}C_2'(x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} C_1' = \cos x, \\ C_2' = -\sin x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \sin x, \\ C_2 = \cos x. \end{cases}$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : y &= y_p + y_h \\ &= \sin x.\frac{\sin x}{x} + \cos x.\frac{\cos x}{x} + A\frac{\sin x}{x} + B\frac{\cos x}{x}, \\ &= \frac{1}{x}\Big(1 + A\sin x + B\cos x\Big). \end{aligned}$$

۶.۱۰.۲. مثال در صورتی که بدانیم $y_1 = x$ یک جواب معادله همگن نظیر به معادله زیر است، جواب عمومی آن را تعیین کنید:

$$\mathscr{E} : x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x}.$$

حل: فرض کنیم $y = y_1 z$ در معادله همگن $\mathscr{E}_h$ نظیر به $\mathscr{E}$ صدق کند. در نتیجه، پس از قرار دادن این فرض در $\mathscr{E}_h$ داریم

$$x^2(1 - \ln x)(z''x + zz') + x(xz' + z) - xz = 0.$$

پس از ساده کردن، داریم

$$x(1 - \ln x)z'' + (3 - 2\ln x)z' = 0.$$

در نتیجه، داریم

$$\frac{dz'}{z'} = -\frac{3-2\ln x}{x(1-\ln x)}dx,$$

و پس از انتگرال گیری داریم:

$$z' = A\frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

که A عددی ثابت است. اما این معادله نیز تفکیک پذیر است:

$$\begin{aligned} z &= A\int(1-\ln x)\frac{dx}{x^2} \\ &= A\int(\ln x-1)d\frac{1}{x} \\ &= A\frac{1}{x}(\ln x-1)+A\int\frac{1}{x^2}dx \\ &= A\frac{1}{x}(\ln x-2)+B. \end{aligned}$$

بنابراین

$$y = y_1 z = A(\ln x - z) + Bx.$$

پس می‌توان y_2 را تابع $\ln x$ گرفت. اکنون نظر به (۲۰.۲) فرض می‌کنیم:

$$y = x.C_1(x) + \ln x.C_2(x),$$

و در نتیجه، باید

$$\begin{cases} x.C_1' + \ln x.C_2' = 0, \\ 1.C_1' + \frac{1}{x}.C_2' = \frac{1}{x^3}(1-\ln x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{1}{x}\ln x.C_2' = -\frac{1}{x^3}\ln x, \\ C_1 = \frac{-1}{x^3}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \int\frac{-1}{x^3}\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x d\frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{2x^2} - \int\frac{1}{2x^2}\frac{dx}{x} = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2}, \\ C_2 = \int\left(\frac{1}{x^2}dx\right) = \frac{-1}{x}. \end{cases}$$

بنابراین، جواب خصوصی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned} y_p &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= \frac{1}{x}(2\ln x+1) - \frac{1}{x}\ln x \\ &= \frac{1}{4x}(1-2\ln x)\ln x - \frac{x}{3}. \end{aligned}$$

جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S}: y &= y_p + y_h\\ &= \frac{1}{4x}(1-2\ln x) + Ax + B\ln x.\end{aligned}$$

۷.۱۰.۲. تمرینات هر یک از معادلات زیر راحل کنید.

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$,　　2) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$,

3) $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$,　　4) $y'' - y' = e^{-x}$,

5) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$,　　6) $y''' + y'' = \sin^2 x$,

7) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$,　　8) $xy'' = (1 + 2x^2)y' \neq 4x^3 e^{x^2}$,

9) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$,　　10) $y'' = 4 + 3y' \tan x$,

11) $x \ln x . y'' = y' + \ln^2 x$,　　12) $xy'' + (2x+1)y' + 4x^2 = 0$,

در هر یک از مسائل زیر y_1 یک جواب از معادله همگن نظیر به معادله داده شده است، جواب عمومی معادله را بیابید.

13) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0, \quad y_1 = e^{mx}$,
14) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x$,
15) $y'' + (\tan x - 2\cot x)y' + 2\cot^2 x . y = 0, \quad y_1 = \sin x$,
16) $y'' + \tan x . y' + \cot^2 x . y = 0, \quad y_1 = \cos(\sin x)$,
17) $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0, \quad y_1 = x$,
18) $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4, \quad y_1 = 1/x$,
19) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x, \quad y_1 = e^x$,
20) $x^3(x-1)y'' + x(2x^2 - 2x - 1)y' - y = (x-1)^2/x, \quad y_1 = 1/x$,
21) $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1, \quad y_1 = \sin e^x$,
22) $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3), \quad y_1 = x^2$,

در هر مورد y_1 و y_2 جواب معادله همگن هستند، جواب عمومی معادله را بیابید.

23) $4xy'' + 2y' + y = 1, \quad y_1 = \sin\sqrt{x}, \quad y_2 = \cos\sqrt{x}$,
24) $(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2 e^x, \quad y_1 = x, \quad y_2 = e^x$,
25) $2x^2(2 - \ln x)y'' + x(4 - \ln x)y' - y = (2 - \ln x)^2/\sqrt{x}, \quad y_1 = \ln x, \quad y_2 = \sqrt{x}$,
26) $x^3(\ln x - 1)y'' - x^2 y' + xy = 2\ln x, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \ln x$.

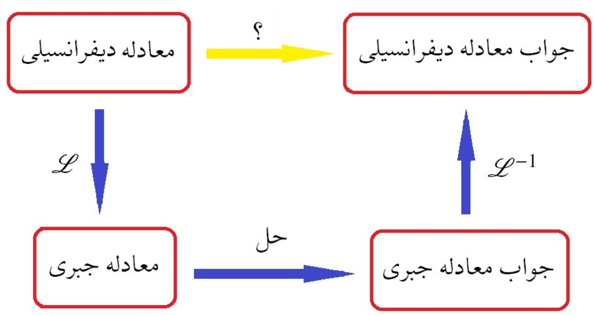
فصل ۳

تبدیلات لاپلاس

[۱] چنانچه طرف ثانی یک معادله خطی با ضرایب ثابت ناپیوسته باشد، روشهای قبلی برای یافتن جواب خصوصی آن به کار نمی‌آید. روش لاپلاس ابزاری مناسب برای پرداختن به این گونه مسائل است.

بخش ۱.۳ معرفی تبدیلات لاپلاس

فرض کنید $\mathscr{E}$ یک معادله یا مساله معادله دیفرانسیل است و روشی یافته‌ایم که می‌تواند آن را به معادله‌ای جبری $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ تبدیل کند. سپس آن معادله جبری حاصل را حل کرده $\mathscr{S}$، و آنگاه از عکس روشمان برای بدست آوردن جواب مساله $\mathscr{E}$ استفاده می‌کنیم $\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{S})$.



۱.۱.۳. تعریف تابع هدف تابعی با مقدار حقیقی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ از متغیر حقیقی t است که در شرایط به شرح ذیل صدق می‌کند:

۱) f بر هر بازه متناهی از محور t ها انتگرال پذیر است.

۲) f به ازای کلیه مقادیر منفی t صفر است.

[۱] — آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ — تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa3.pdf

۳) $|f(t)|$ در $t \to \infty$ کندتر از تابع نمایی رشد کند، به این معنی که اعدادی مثبت چون $M > 0$ و $s > 0$ به گونه‌ای یافت شوند که به ازای هر t ای $|f(t)| \leq Me^{st}$. بزرگترین s ای که در این شرط صدق کند را درجه رشد f می‌نامند.

۲.۱.۳. مثال نشان دهید تابع زیر یک تابع هدف است:

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}\sin 3t & t \geq 0 \quad \text{اگر} \\ 0 & t < 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

حل: چون f پیوسته است، پس بر هر بازه متناهی انتگرال پذیر است. بعلاوه چون $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ به ازای هر α. پس:

$$|f(t)| = \begin{cases} e^{2t}|\sin 3x| & t \geq 0 \quad \text{اگر} \\ 0 & t < 0 \quad \text{اگر} \end{cases} \quad \leq \quad e^{2t}|\sin 3t| \quad \leq \quad e^{2t}.$$

یعنی $M = 1$ و $s = 2$. پس f تابع هدف است.

۳.۱.۳. مثال تابع پله‌ای واحد یک تابع هدف است:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \quad \text{اگر} \\ 0 & t \leq 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

۴.۱.۳. قرارداد *چون در ادامه عملا از ویژگیهای تابع در قسمت منفی محور t ها استفاده نمی‌شود، لذا قرار این است که در این فصل همه توابع بر قسمت منفی محور t ها صفر است، حتی اگر ظاهرا چنین نباشد. مثلا وقتی می‌نویسیم $f(t) = t^2$ منظور تابع زیر است:*

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & t > 0 \quad \text{اگر} \\ 0 & t \leq 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

۵.۱.۳. قضیه *فرض کنید $f(t)$ یک تابع هدف است، در این صورت انتگرال تابع $f(t)e^{-st}$ به ازای هر $s > s_0$ بر بازه $[0; +\infty)$ موجود و متناهی است. در این صورت، تعریف می‌کنیم:*

$$F(s) := \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt, \qquad s > s_0.$$

تابع حاصل $F()$ را با نماد $\mathscr{L}\{f\}$ نیز نشان می‌دهیم. در واقع:

$$\mathscr{L}\{f\} = F \iff \mathscr{L}^{-1}\{F\} = f.$$

۶.۱.۳. قرارداد *از این پس متغیر توابع هدف را t و متغیر توابع حاصل را s می‌گیریم. توابع هدف را با حروف کوچک و توابع حاصل را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. $\mathscr{L}$ حرف اول ریاضیدان معروف فرانسوی (پیرسیمون دولاپلاس ۱۸۲۷-۱۷۴۹) است.*

۷.۱.۳. قضیه عملگر لاپلاس خطی است به این معنی که به ازای هر دو تاب g و f و هر دو عدد ثابت a,b داریم:

$$\mathscr{L}\{af+bg\}=a\mathscr{L}\{f\}+b\mathscr{L}\{g\}.$$

۸.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $f(t)=1$ را بیابید.

حل: با توجه به تعریف ۵.۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{1\} &= \int_0^\infty 1e^{-st}dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^b\\ &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}e^{-bs}\\ &= \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

حد آخر در صورتی صفر است که $s>0$. بنابراین، نشان دادیم که:

$$\boxed{\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s},\qquad s>0.} \tag{۱.۳}$$

۹.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $f(t)=t^n$ که $n\in\mathbb{N}$ را بیابید.

حل: به استقرا روی n عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t\} &= \int_0^\infty te^{-st}dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-st}dt\\ &= \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b tde^{-st}\\ &= \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\left\{te^{-st}\Big|_0^b-\int_0^b e^{-st}dt\right\}\\ &= \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\left\{be^{-bs}+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b\right\}\\ &= \frac{1}{s^2}-\lim_{b\to\infty}\frac{bs+1}{s^2}e^{-bs}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s^2} - \lim_{b\to\infty} \frac{bs+1}{s^2 e^{bs}} \\
&= \frac{1}{s^2} - \lim_{b\to\infty} \frac{b}{s^3 e^{bs}} \\
&= \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}
$$

قاعده هوپیتال وقتی به کار می‌آید که $s > 0$ و حد به حالت $\frac{\infty}{\infty}$ بیانجامد. پس ثابت شد که:

$$
\boxed{\mathscr{L}\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2}, \qquad s > 0.} \tag{۲.۳}
$$

حال فرض کنیم $\mathscr{L}\left\{t^n\right\}$ را یافته‌ایم و $\mathscr{L}\left\{t^{n+1}\right\}$ را می‌خواهیم:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^{n+1}\right\} &= \int_0^\infty t^{n+1} e^{-st} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^{n+1} e^{-st} dt \\
&= \frac{-1}{s} \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^{n+1} de^{-st} \\
&= -\frac{1}{s} \lim_{b\to\infty} \left\{ t^{n+1} e^{-st} \Big|_0^b - \int_0^b e^{-st} dt^{n+1} \right\} \\
&= \frac{-1}{s} \lim_{b\to\infty} \left\{ \frac{b^{n+1}}{e^{+sb}} - (n+1) \int_0^b e^{-st} t^n dt \right\} \\
&= -\frac{1}{s} \lim_{b\to\infty} \frac{b^{n+1}}{e^{+sb}} + \frac{n+1}{s} \int_0^\infty t^n e^{-st} dt.
\end{aligned}
$$

اما حد آخر صفر است (کافی است $n+1$ بار هوپیتال استفاده کنیم و از شرط $s > 0$ استفاده کنیم). بنابراین، ثابت شد که:

$$
\mathscr{L}\left\{t^{n+1}\right\} = \frac{n+1}{s} \mathscr{L}\left\{t^n\right\}, \qquad s > 0.
$$

اکنون توجه می‌کنیم که

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^n\right\} &= \frac{n}{s} \mathscr{L}\left\{t^{n-1}\right\} \\
&= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \mathscr{L}\left\{t^{n-2}\right\} \\
&\vdots \\
&= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} \mathscr{L}\left\{1\right\} \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

پس ثابت شد که

$$\boxed{\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0.} \tag{۳.۳}$$

۱۰.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $\cos at, \sin at$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه $e^{ait} = \cos at + i\sin at$، کافی است تبدیل لاپلاس e^{ait} را بیابیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{e^{ait}\} &= \int_0^\infty a^{ait}e^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(ai-s)t}dt \\
&= \frac{1}{ai-s}\lim_{b\to\infty} e^{(ai-s)t}\Big|_0^b \\
&= \frac{1}{ai-s}\lim_{b\to\infty} e^{(ai-s)b} - \frac{1}{ai-s} \\
&= -\frac{s+ai}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty} e^{-sb}(\cos ab + i\sin ab) + \frac{s+ai}{s^2+a^2} \\
&= -\frac{s+ai}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\frac{\cos ab}{e^{+sb}} - i\frac{s+ai}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\frac{\sin ba}{e^{+sb}} + \frac{s+ai}{s^2+a^2}.
\end{aligned}$$

در دو حد اول صورت بین ۱ و ۱- است و مخرج به بینهایت میل می‌کند، پس اگر $s > 0$ هر دوی آنها صفرند و ثابت شده است:

$$\mathscr{L}\{e^{ait}\} = \frac{s+ai}{s^2+a^2}.$$

در نتیجه

$$\boxed{\mathscr{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad \mathscr{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0.} \tag{۴.۳}$$

۱۱.۱.۳. مثال تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{at}$ را بیابید.

حل: با توجه به تعریف داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{e^{(a-s)b}}{a-s} + \frac{1}{s-a}.
\end{aligned}$$

حد آخر در صورتی صفر است که $a - s < 0$ یعنی $s > a$، پس ثابت شد:

$$\boxed{\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.} \tag{۵.۳}$$

۱۲.۱.۳. مثال لاپلاس تابع $f(t)=t-t^2+2\cos t-\sin 2t$ را بیابید.

حل: با توجه به مثالهای بالا داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\} &= \mathscr{L}\{t\}-\mathscr{L}\{t^2\}+2\mathscr{L}\{\cos t\}-\mathscr{L}\{\sin 2t\}\\ &= \frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^3}+2\frac{s}{s^2+4}-\frac{2}{s^2+4}.\end{aligned}$$

۱۳.۱.۳. مثال لاپلاس تابع $\cosh at, \sinh at$ را بیابید.

حل: با توجه به مثال ۱۱.۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\sinh at\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{at}\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-at}\}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+a}\\ &= \frac{a}{s^2-a^2}.\end{aligned}$$

به صورت مشابه چون $\cosh at=\frac{a^{at}+e^{-at}}{2}$، داریم:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\sinh at\}=\frac{a}{s^2-a^2},\qquad \mathscr{L}\{\cosh at\}=\frac{s}{s^2-a^2},\qquad s>|a|.} \tag{۶.۳}$$

۱۴.۱.۳. تمرینات لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

1) $f(t)=3\sin 2t-5e^t+1,$ 2) $f(t)=\sin^2 t,$
3) $f(t)=(1+e^t)(1-2e^{-t}),$ 4) $f(t)=\cos^2 t,$
5) $f(t)=\sin t\sin 2t,$ 6) $f(t)=(1+t)^3,$
7) $f(t)=e^t\sin t,$ 8) $f(t)=(e^t-e^{-t})^2,$
9) $f(t)=e^{-t}\cos 2t,$ 10) $f(t)=t^2e^t,$
11) $f(t)=\sin at\cos bt,$ 12) $f(t)=\sin^2 t.$

بخش ۲.۳ مشتق و تبدیل لاپلاس

۱.۲.۳. قضیه (مشتق از تابع هدف) *اگر $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ توابع هدف باشند و $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$. در این صورت*

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathscr{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0),\\ &\mathscr{L}\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0),\\ &\mathscr{L}\{f'''(t)\}=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0),\\ &\qquad\vdots\\ &\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).\end{aligned}} \tag{۷.۳}$$

۲.۲.۳. مثال لاپلاس $f(t)=\sin^2 t$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه $f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t$، داریم:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=\mathscr{L}\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+4}.$$

از طرفی $f(0)$ برابر صفر است، پس بنا به ۱.۲.۳ داریم:

$$\frac{2}{s^2+4}=sF(s)-0,$$

یا

$$\mathscr{L}\{\sin^2 t\}=\frac{2}{s(s^2+4)}.$$

۳.۲.۳. مثال لاپلاس $f(t)=te^t$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه $f'(t)=e^t+te^t$ و $f(0)=0$، از ۱.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \mathscr{L}\{e^t\}+\mathscr{L}\{te^t\}\\ sF(s)-f(0) &= \frac{1}{s-1}+F(s),\\ sF(s) &= F(s)+\frac{1}{s-1}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{L}\{te^t\}=F(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$$

۴.۲.۳. مثال مساله $y'-y=t-1$ و $y(0)=0$ را حل کنید.

حل: ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y'-y\} &= \mathscr{L}\{t-1\},\\ s\mathscr{L}\{y\}-y(0)-\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{t\}-\mathscr{L}\{1\},\\ (s-1)\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2}-\frac{1}{s},\\ \mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s-1}.\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

از تکنیک تفکیک کسر استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2},\qquad \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s}=\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\\ &= \mathscr{L}\{e^t\}-2\mathscr{L}\{1\}-\mathscr{L}\{t\},\end{aligned}$$

نتیجه اینکه، جواب مساله چنین است:

$$y(t)=e^t-t-2.$$

۵.۲.۳. قضیه (مشتق از تابع نتیجه) *اگر به ازای $s>s_0$ داشته باشیم $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$، آنگاه*

$$\boxed{\frac{d}{ds}F(s)=-\mathscr{L}\{tf(t)\},\qquad \mathscr{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}.} \tag{۸.۳}$$

به صورت مشابه

$$\boxed{\frac{d^n}{ds^n}F(s)=(-1)^n\mathscr{L}\{t^nf(t)\},\qquad \mathscr{L}\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{f(t)\}.} \tag{۹.۳}$$

۶.۲.۳. مثال لاپلاس t^ne^{at} را بیابید.

حل: با توجه به ۵.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^ne^{at}\} &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{e^{at}\}\\ &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(\frac{1}{s-a})\\ &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(s-a)^{-1}\\ &= (-1)^n(-1)(-2)\cdots(-n)(s-a)^{-n-1}\\ &= (-1)^n(-1)^nn!(s-a)^{-(n+1)}\\ &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

پس ثابت شد که

$$\boxed{\mathscr{L}\{t^ne^{at}\}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.} \tag{۱۰.۳}$$

۷.۲.۳. مثال لاپلاس $t^n\sin at$ و $t^n\cos at$ را بیابید.

حل: از مثال ۶.۲.۳ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^n \sin at\right\} &= \operatorname{Im}\mathscr{L}\left\{t^n e^{ait}\right\}\\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{n!}{(s-ai)^{n+1}}\right)\\
&= n!\operatorname{Im}\left(\left(\frac{s+ai}{s^2+a^2}\right)^{n+1}\right)\\
&= \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}\operatorname{Im}(s+ai)^{n+1}\\
&= \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ai)^k s^{n-k}
\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^n \sin at\right\} &= \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{k=1,3,5,\cdots}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{n}{k}a^k s^{n-k},\\
\mathscr{L}\left\{t^n \cos at\right\} &= \frac{n!}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{k=0,2,4,\cdots}(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{n}{k}a^k s^{n-k}.
\end{aligned}} \tag{۱۱.۳}$$

۸.۲.۳. مثال لاپلاس $te^{at}\sin bt$ را بیابید.

حل: با استفاده از ۵.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{te^{at}\sin bt\right\} &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{e^{at}\sin bt\right\}\\
&= -\operatorname{Im}\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{e^{at}e^{bit}\right\}\\
&= -\operatorname{Im}\frac{d}{ds}\frac{a+bi}{s-(a+bi)}\\
&= -\operatorname{Im}\frac{-(a+b)}{\left\{s-(a+bi)\right\}^2}\\
&= \frac{1}{((s-a)^2+b^2)}\operatorname{Im}(a+bi)(s-a+bi)^2\\
&= \frac{((s-a)^2-b^2)b+(b(s-a))a}{((s-a)^2+b^2)^2}\\
&= \frac{b(s-a)^2+ab(s-a)-b^3}{((s-a)^2+b^2)^2}
\end{aligned}$$

۹.۲.۳. مثال لاپلاس $te^{bt}\cosh at$ را به دست آورید.

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

حل: با توجه به ۵.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{te^{bt}\cosh at\} &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{bt}\cosh at\}\\
&= \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{bt}(e^{at}+e^{-at})\}\\
&= \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{(a+b)t}+e^{(b-a)t}\}\\
&= \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a-b}+\frac{1}{\{s+a-b}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-a-b)^2}+\frac{1}{(s+a-b)^2}\right)\\
&= \frac{-1}{2}\frac{2s^2+2a^2-4bs+2b^2}{((s-b)^2-a^2)^2}\\
&= -\frac{(s-b)^2+a^2}{((s-b)^2-a^2)^2}
\end{aligned}$$

۱۰.۲.۳. تمرینات لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

1)	te^{2t}	2)	$t^2\cos t$	3)	$\sin^3 t$
4)	$te^{-t}\sin t$	5)	$(t+1)\sin t$	6)	$\cos^2 t$
7)	$t\sinh(2t)$	8)	$t(e^t+e^{2t})$	9)	$t\sin t\sin 2t$
10)	$te^{-t}\cos t$	11)	$t\sin^3 t$	12)	$t^2\cos t\sin 2t$

بخش ۳.۳ انتگرال و تبدیل لاپلاس

۱.۳.۳. قضیه (انتگرال از تابع هدف) *اگر $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$، آنگاه*

$$\boxed{\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}F(s).} \qquad (۱۲.۳)$$

۲.۳.۳. مثال لاپلاس $\mathscr{L}\{\int_0^t \tau\sin\tau d\tau\}$ را به دست آورید.

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

حل: با توجه به ۱.۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\Big\{\int_0^t \tau\sin\tau d\tau\Big\}\\
&= \frac{1}{s}\mathscr{L}\{t\sin t\}\\
&= \frac{1}{s}(-1)\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\sin t\}\\
&= \frac{-1}{s}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+a^2}\\
&= \frac{2}{(s^2+a^2)^2}.
\end{aligned}$$

۳.۳.۳. مثال لاپلاس $f(t)=\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}d\tau$ را بیابید.

حل: با توجه به ۱.۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\Big\{\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}d\tau\Big\}\\
&= \frac{1}{s}\mathscr{L}\{t^2e^{-t}\}\\
&= \frac{1}{s}\frac{2!}{(s-(-1))^{2+1}}\\
&= \frac{2}{s(s+1)^3}.
\end{aligned}$$

۴.۳.۳. قضیه (انتگرال از تابع نتیجه) *اگر $\int_s^\infty F(s)ds$ همگرا باشد، آنگاه:*

$$\boxed{\mathscr{L}\Big\{\frac{f(t)}{t}\Big\}=\int_s^\infty F(s)ds.} \qquad (۱۳.۳)$$

۵.۳.۳. مثال لاپلاس $\frac{\sin t}{t}$ را بدست آورید.

حل: با توجه به ۴.۳.۳ با فرض $f(t)=\sin t$، داریم

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\Big\{\frac{\sin t}{t}\Big\} &= \int_s^\infty F(s)ds\\
&= \int_s^\infty \mathscr{L}\{\sin t\}ds\\
&= \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_s^b \frac{ds}{s^2+1}\\
&= \lim_{b\to\infty}\arctan s\Big|_s^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\arctan b-\arctan s.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}.$$

۶.۳.۳. مثال لاپلاس $\frac{e^t-1}{t}$ را بدست آورید.

حل: با توجه به ۴.۳.۳ با فرض $f(t) = e^t - 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\frac{e^t-1}{t}\right\} &= \int_s^\infty F(s)ds \\
&= \int_s^\infty \mathscr{L}\left\{e^t-1\right\}ds \\
&= \int_s^\infty \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big[\ln(s-1) - \ln s\Big]_s^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{b-1}{b} - \ln\frac{s-1}{s} \\
&= \ln\frac{s}{s-1}.
\end{aligned}$$

۷.۳.۳. قضیه *اگر $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ همگرا باشد، آنگاه*

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(s)ds.} \qquad (۱۴.۳)$$

۸.۳.۳. مثال با فرض $f(t) = \sin t$ در ۷.۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt \\
&= \int_0^\infty f(s)ds \\
&= \int_0^\infty \mathscr{L}\left\{\sin t\right\}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} \\
&= \lim_{b\to\infty} \arctan s\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

۹.۳.۳. مثال مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ را به دست آورید $(0<a,b)$.

حل: با توجه به ۷.۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt &= \int_0^\infty \mathscr{L}\{e^{-at}-e^{-bt}\}dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^B \left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+a}\right)ds \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big[\ln(s+a)-\ln(s+a)\Big]_0^B \\
&= \lim_{B\to\infty}\ln\left(\frac{B+a}{B+b}\right)-\ln\left(\frac{a}{b}\right) \\
&= \ln\left(\frac{a}{b}\right).
\end{aligned}$$

۱۰.۳.۳. تمرینات لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

1) $\int_0^t t\sinh 2t dt,$

2) $\int_0^t \cos^2 at dt,$

3) $\int_0^t (t+1)\cos at dt,$

4) $\int_0^t \cosh at dt,$

5) $\int_0^t t^2\sin^2 t dt,$

6) $\int_0^t t^3 e^{-2t}dt,$

7) $\frac{e^{2t}-1}{t},$

8) $\frac{1-e^{-t}}{t},$

9) $\frac{\sin^2 t}{t},$

10) $\frac{\cos^2 t-1}{t},$

11) $\frac{1-\cos t}{t},$

12) $\frac{\cos t-\cos 2t}{t},$

13) $\frac{e^t-1-t}{t},$

14) $\frac{e^t-e^{-t}}{2},$

15) $\frac{1-\cosh 2t}{t},$

16) $\frac{\sinh t}{t}.$

مقدار هر یک از انتگرالهای داده شده را بیابید:

17) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}dt,$

18) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{\beta t}}{t}\sin at dt,$

19) $\int_0^\infty \frac{\sin at\sin bt}{t}dt,$

20) $\int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt,$

21) $\int_0^\infty \frac{\arctan at-\arctan bt}{t}dt,$

22) $\int_0^\infty \frac{\cosh at-\cosh bt}{t}dt,$

23) $\int_0^\infty \frac{\sinh at\sinh bt}{t}dt,$

24) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sinh at}{t}dt.$

بخش ۴.۳ تغییر مقیاس و انتقال در لاپلاس

۱.۴.۳. قضیه (تغییر مقیاس) اگر α عددی مثبت و بازاء هر $s > s_0$ ای $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$، آنگاه

$$\boxed{\mathscr{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}F\Big(\frac{s}{\alpha}\Big).} \tag{۱۵.۳}$$

۲.۴.۳. قضیه (انتقال در تابع هدف) اگر بازاء هر $s > s_0$ ای $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ و a عددی مثبت باشد، در این صورت

$$\boxed{\mathscr{L}\{u_0(t-a)f(t-a)\} = e^{-at}F(s),} \tag{۱۶.۳}$$

که $u_0(t)$ تابع پله‌ای واحد است:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \text{ اگر} \\ 0 & t < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۳.۴.۳. مثال لاپلاس $u_a(t) := u_0(t-a)$ را بیابید.

حل: با توجه به ۲.۴.۳ و فرض $f(t) = 1$ داریم:

$$\mathscr{L}\{u_0(t)\}e^{-as}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}e^{-as}.$$

پس ثابت شد که

$$\boxed{\mathscr{L}\{u_0(t)\} = \frac{1}{s}, \qquad \mathscr{L}\{u_a(t)\} = \frac{1}{s}e^{-as}.} \tag{۱۷.۳}$$

۴.۴.۳. مثال لاپلاس $f(t) = (t^2+1)u_0(t-2)$ را بیابید.

حل: با توجه به ۲.۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{((t-2+2)^2+1)u_0(t-2)\} \\ &= \mathscr{L}\{((t-2)^2+4(t-2)+5)u_0(t-2)\} \\ &= e^{-2s}\mathscr{L}\{t^2+4t+5\} \\ &= e^{-2s}\Big(\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s^2}+\frac{5}{s}\Big). \end{aligned}$$

۵.۴.۳. قضیه (انتقال در تابع نتیجه) اگر بازاء هر $s > s_0$ ای $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ و a عددی دلخواه باشد، در این صورت

$$\boxed{\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).} \tag{۱۸.۳}$$

۶.۴.۳. مثال لاپلاس $f(t) = e^{-t}\cos 2t$ را بیابید.

حل: با توجه به ۵.۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{e^{-t}\cos 2t\}\\ &= \mathscr{L}\{\cos 2t\}\Big|_{s=s-(-1)}\\ &= \frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=s+1}\\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4}.\end{aligned}$$

۷.۴.۳. مثال لاپلاس $f(t) = e^{2t}(t^2-t+1)$ را به دست آورید.

حل: با توجه به ۵.۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{e^{2t}(t^2-t+1)\}\\ &= \mathscr{L}\{t^2-t+1\}\Big|_{s=s-2}\\ &= \left(\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)\Big|_{s=s-2}\\ &= \frac{(s-2)^2-(s-2)+2}{(s-2)^3}.\end{aligned}$$

۸.۴.۳. تمرینات لاپلاس هر یک از توابع داده شده را بدست آورید.

1) $u(t-2)\sin(t-2)$,
2) $u(t-a)\cos(t-b)$,
3) $u(t-a)e^{t-b}$,
4) $u(t-a)\cos^2(t-a)$,
5) $t^3(t-1)$,
6) $e^t \sin tu(t)$,
7) $(t^2-t)e^t u(t)$,
8) $5+tu(t-1)-5u(t-2)$,
9) $\cos(at+b)$,
10) $\sinh(at+b)$,
11) $e^{at}\sin bt\cos ct$,
12) $e^{at}\sin bt\sin ct$,
13) $e^{at}\cos bt\cos ct$,
14) $e^{-t}t^5$,
15) $e^t\sinh t$,
16) $te^t\cos t$,
17) $e^{-at}\cos^2 bt$,
18) $te^{-t}\cosh t$,
19) $te^t u(t-1)$,
20) $u(t-a)e^{bt}\sin ct$.

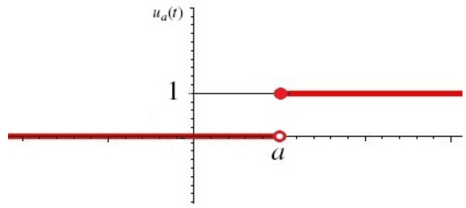
بخش ۵.۳　تابع پله‌ای واحد و توابع پیوسته تکه‌ای

۱.۵.۳. تعریف تابعی که بر کل R تعریف شود و ناپیوستگی‌های آن تعدادی متناهی نقطه باشند، تابع پیوسته تکه‌ای نامیده می‌شود. ساده‌ترین تابع پیوسته تکه‌ای، تابع پله‌ای واحد است:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } t \ge 0 \\ 0 & \text{اگر } t < 0 \end{cases}$$

۲.۵.۳. مثال تابع $u_a(t) := u_0(t-a)$ را بررسی کنید.

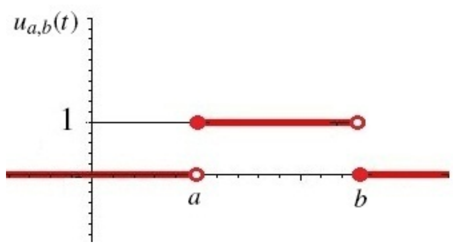
حل: ملاحظه می‌گردد که این تابع دو ضابطه‌ای است:



$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \text{ اگر} \\ 0 & t < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۳.۵.۳. مثال تابع $u_{a,b}(t) = u_0(t-a) - u_0(t-b)$ را بررسی کنید.

حل: ملاحظه می‌گردد که این تابع سه ضابطه‌ای است:



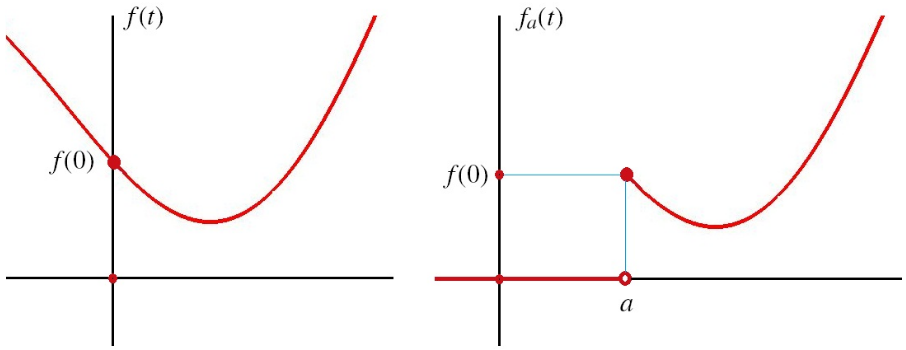
$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \text{ اگر} \\ 1 & a \leq t < b \text{ اگر} \\ 0 & b \leq t \text{ اگر} \end{cases}$$

۴.۵.۳. مثال تابع $f_a(t) := f(t-a)u_0(t-a)$ را بررسی کنید.

حل: ملاحظه می‌گردد که:

$$u_0(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \text{ اگر} \\ 0 & t < 0 \text{ اگر} \end{cases} \implies f_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \text{ اگر} \\ f(t-a) & a \leq t \text{ اگر} \end{cases}$$

یعنی $f_a(t)$ انتقال تابع f در راستای محور t ها به اندازه a واحد است. البته قبل $t = a$ تابع f را به صفر تبدیل می‌کند. به شکل زیر توجه کنید:



۵.۵.۳. مثال تابع داده شده را بر حسب تابع پله‌ای واحد بیان کنید، سپس لاپلاس آن را محاسبه کنید:

$$f(t)=\begin{cases} 2 & 0\le t<2 \quad \text{اگر} \\ -1 & 2\le t<3 \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حل: با توجه به مثالهای بالا، داریم:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2u_{0,2}(t)-u_{2,3}(t) \\ &= 2(u_0(t)-u_2(t))-(u_2(t)-u_3(t)) \\ &= 2u_0(t)-3u_2(t)+u_3(t) \\ &= 2u_0(t)-3u_0(t-2)+u_0(t-3), \\ \mathscr{L}\{f(t)\} &= 2\mathscr{L}\{u_0(t)\}-3\mathscr{L}\{u_0(t-2)\}+\mathscr{L}\{u_0(t-3)\} \\ &= 2\frac{1}{s}-3\frac{1}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-3s} \\ &= \frac{1}{s}(2-3e^{-2s}+e^{-2s}). \end{aligned}$$

۶.۵.۳. مثال تابع داده شده را بر حسب تابع پله‌ای واحد بیان نموده، لاپلاس آن را بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \quad \text{اگر} \\ t & 0\le t<\pi \quad \text{اگر} \\ 0 & \pi\le t<2\pi \quad \text{اگر} \\ \sin t & 2\pi\le t \quad \text{اگر} \end{cases}$$

حل: با توجه به مثالهای بالا داریم:

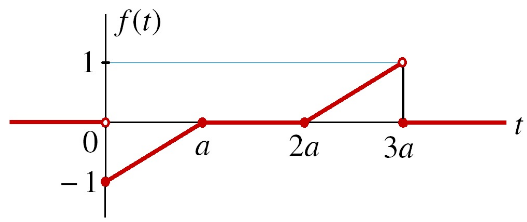
$$\begin{aligned} f(t) &= tu_{0,\pi}(t)+0u_{\pi,2\pi}(t)+\sin t u_{2\pi}(t) \\ &= t(u_0(t)-u_\pi(t))+\sin t u_{2\pi}(t) \\ &= tu_0(t)-tu_0(t-\pi)+\sin t u_0(t-2\pi) \\ &= tu_0(t)-(t-\pi)u_0(t-\pi)-\pi u_0(t-\pi)+\sin(t-2\pi)u_0(t-2\pi), \\ \mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{tu_0(t)\}-\mathscr{L}\{(t-\pi)u_0(t-\pi)\}-\pi\mathscr{L}\{u_0(t-\pi)\}+ \\ &\quad +\mathscr{L}\{\sin(t-2\pi)u_0(t-2\pi)\} \\ &= e^{-0s}\mathscr{L}\{t\}-e^{-\pi s}\mathscr{L}\{t\}-\pi e^{-\pi s}\frac{1}{s}+e^{-2\pi s}\mathscr{L}\{\sin t\} \\ &= \frac{1}{s^2}e^{-\pi s}\frac{1}{s^2}e^{-\pi s}+e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

۷.۵.۳. مثال لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید:

حل: قبل از $t=a$ ضابطه تابع با خط گذرنده از نقاط $(0,1)$ و $(a,0)$ یکی است:

$$\frac{f(t)-0}{-1-0}=\frac{t-a}{0-a} \implies f(t)=\frac{t-a}{a}.$$

تابع f بین a و $2a$ برابر صفر است.



تابع f بین $2a$ و $3a$ با خطی منطبق است که از نقاط $(2a,0)$ و $(3a,1)$ می‌گذرد:

$$\frac{f(t)-0}{1-0}=\frac{t-2a}{3a-2a}, \implies f(t)=\frac{t-2a}{a}.$$

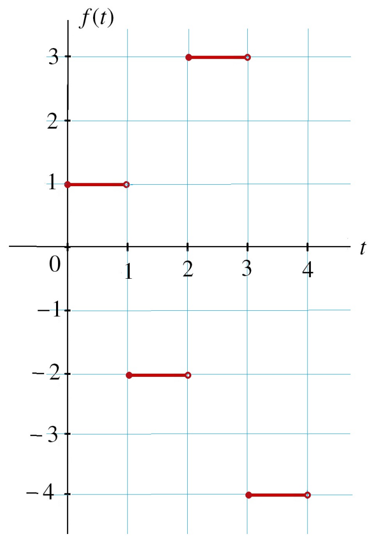
پس در مجموع داریم:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t-a}{a}u_{0,a}(t)+\frac{t-2a}{a}u_{2a,3a}(t)\\
&= \frac{t-a}{a}(u_0(t)-u_a(t))+\frac{t-2a}{a}(u_{2a}(t)-u_{3a}(t))\\
&= \frac{t-a}{a}u_0(t)-\frac{1}{a}(t-a)u_0(t-a)+\frac{1}{a}u_0(t-2a)(t-2a)\\
&\quad -\frac{1}{a}(t-3a)u_0(t-3a)-u_0(t-3a),\\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{a}\mathscr{L}\{u_0(t)(t-a)\}-\frac{1}{a}\mathscr{L}\{(t-a)u_0(t-a)\}+\frac{1}{a}\mathscr{L}\{(t-2)(t-2a)\}\\
&\quad -\frac{1}{a}\mathscr{L}\{(t-3a)u_0(t-3a)\}-\mathscr{L}\{u_0(t-3a)\}\\
&= \frac{1}{a}e^{-0s}\mathscr{L}\{t-a\}-\frac{1}{a}e^{-as}\mathscr{L}\{t\}+\frac{1}{a}e^{-2as}\mathscr{L}\{t\}-\frac{1}{a}e^{-2as}\mathscr{L}\{t\}+\frac{1}{s}e^{-3s}\\
&= \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{a}{s}\right\}-\frac{1}{a}e^{-s}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{a}e^{-2as}.\frac{1}{s^2}-\frac{1}{a}e^{-3as}.\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}e^{-3as}\\
&= \frac{1}{as^2}(1-as)-\frac{1}{as^2}e^{-as}+\frac{1}{as^2}e^{-2as}-\frac{1}{s^2}(1+as)e^{-3as}.
\end{aligned}$$

۸.۵.۳. مثال لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل را بیابید:

حل: ملاحظه می‌گردد که

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1 \text{ اگر}\\ -2 & 1\le t<2 \text{ اگر}\\ 3 & 2\le t<3 \text{ اگر}\\ -4 & 3\le t<4 \text{ اگر}\\ 5 & 4\le t<5 \text{ اگر}\\ -6 & 5\le t<6 \text{ اگر}\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$



$$
\begin{aligned}
f(t) &= u_{0,1}(t) - 2u_{1,2}(t) + 3u_{2,3}(t) - \cdots \\
&= (u_0(t) - u_1(t)) - 2(u_1(t) - u_2(t)) + 3(u_2(t) - u_3(t)) - \cdots \\
&\quad \cdots + (-1)^{n+1} n(u_{n-1}(t) - u_n(t)) + \cdots \\
&= u_0(t) - 3u_1(t) + 5u_2(t) - 7u_3(t) + \cdots + (-1)^n (2n+1) u_n(t) + \cdots
\end{aligned}
$$

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} &= \mathscr{L}\Big\{u_0(t)\Big\} - 3\mathscr{L}\Big\{u_0(t-1)\Big\} + 5\mathscr{L}\Big\{u_0(t-2)\Big\} - \cdots \\
&\quad \cdots + (-1)^n (2n+1)\mathscr{L}\Big\{u_0(t-n)\Big\} + \cdots \\
&= \frac{1}{s} - 3\frac{1}{s}e^{-s} + 5\frac{1}{s}e^{-2s} - \cdots + (-1)^n (2n+1)\frac{1}{s}e^{-ns} + \cdots \\
&= \frac{2}{s}\Big\{-e^{-s} + 2e^{-2s} - 3e^{-3s} + \cdots + (-1)^n n e^{-ns}\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{s}\Big\{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots + (-1)^n e^{-ns} + \cdots\Big\} + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} \\
&= \frac{-2}{s}\Big\{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{3s} + \cdots + (-1)^n e^{-ns} + \cdots\Big\}' + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} \\
&= -\frac{2}{s}\left(\frac{1}{1+e^{-s}}\right) + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} \\
&= -\frac{2}{s}\frac{-e^{-s}}{(1+e^{-s})^2} + \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} \\
&= \frac{1+3e^{-s}}{s(1+e^{-s})^2}.
\end{aligned}
$$

۹.۵.۳. تمرینات هر یک از توابع معرفی شده را به کمک تابع پله‌ای واحد بیان نموده، لاپلاس آن را به دست آورید. فرض بر این است که تابع در جاهایی که تعریف شده است، صفر است.

1) $f(t)=|t-1|, t\geq 0$

2) $f(t)=t^2, t\geq 1$

3) $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<2 \ \text{اگر} \\ 1 & 2\geq t \ \text{اگر} \end{cases}$

4) $f(t)=\begin{cases} -1 & 0\leq t<1 \ \text{اگر} \\ 2 & 1\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

5) $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<1/2 \ \text{اگر} \\ t & \frac{1}{2}\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

6) $f(t)=\begin{cases} 2t & 0\leq t<1 \ \text{اگر} \\ 1-t & 1\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

7) $f(t)=\begin{cases} \sin t & 0\leq t<\pi/2 \ \text{اگر} \\ 0 & \frac{\pi}{2}\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

8) $f(t)=\begin{cases} t & 0\leq t<1 \ \text{اگر} \\ 2t^2 & 1\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

9) $f(t)=\begin{cases} 3e^{-t} & 0\leq t<1 \ \text{اگر} \\ -1 & 1\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

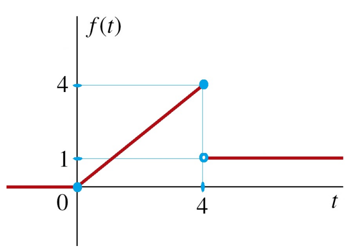
10) $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<2 \ \text{اگر} \\ e^{-1-t} & 2\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

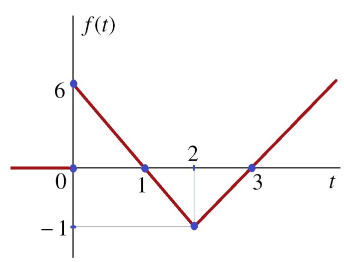
11) $f(t)=\begin{cases} \cos t & 0\leq t<\pi \ \text{اگر} \\ 0 & \pi\leq t<2\pi \ \text{اگر} \\ 1 & 2\pi\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

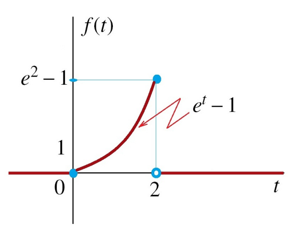
12) $f(t)=\begin{cases} -1 & 0\leq t<1 \ \text{اگر} \\ t & 1\leq t<2 \ \text{اگر} \\ t^2 & 2\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

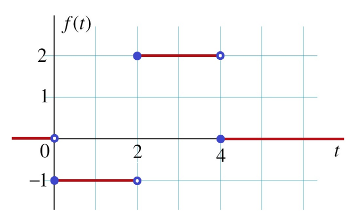
13) $f(t)=\begin{cases} 1-t & 0\leq t<2 \ \text{اگر} \\ t & 2\leq t<3 \ \text{اگر} \\ 0 & 3\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

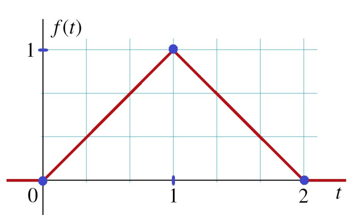
14) $f(t)=\begin{cases} \sin t & 0\leq t<2\pi \ \text{اگر} \\ \cos t & 2\pi\leq t<6\pi \ \text{اگر} \\ \sin t & 6\pi\leq t \ \text{اگر} \end{cases}$

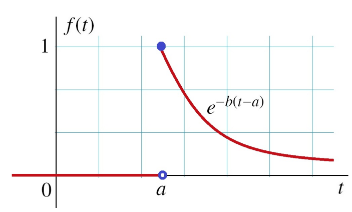
15)


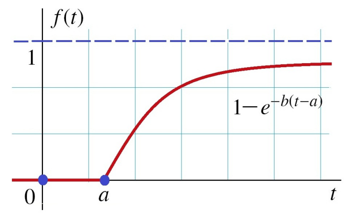
16)


17)


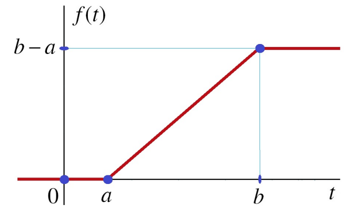
18)


19)


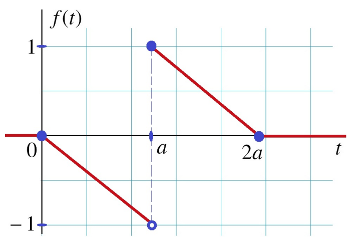
20)




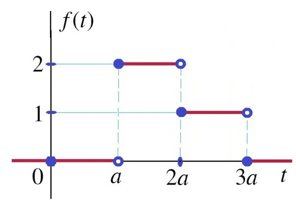
21)



22)



23)



24)

بخش ۶.۳　لاپلاس توابع متناوب

۱.۶.۳. تعریف　در صورتی می‌گوییم تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متناوب است که عددی مثبت مانند T به گونه‌ای یافت گردد که به ازای هر x ای $f(x+T)=f(x)$. در صورتی می‌گوییم دوره تناوب f برابر T_0 است که T_0 کوچکترین عدد مثبت صادق در رابطه $f(x+T_0)=f(x)$ باشد.

۲.۶.۳. مثال　توابع $\tan 2x, 2\sin x-\cos x, \cos x\sin x$ توابعی متناوب با تناوب برابر $T=2\pi$ هستند.

۳.۶.۳. مثال　تابع $f(x)=x-|x|$ متناوب با تناوب $T=1$ است.

۴.۶.۳. مثال　تابع $f(x)=0$ متناوب ولی بدون تناوب است!

۵.۶.۳. مثال　توابع $|\sin x|$، $2|\cos x|$، $\tan x$ و $\cot x$ متناوب با تناوب $T=\pi$ هستند.

۶.۶.۳. قضیه　*اگر تابع $f(x)$ متناوب با تناوب T و یک تابع هدف باشد، در این صورت*

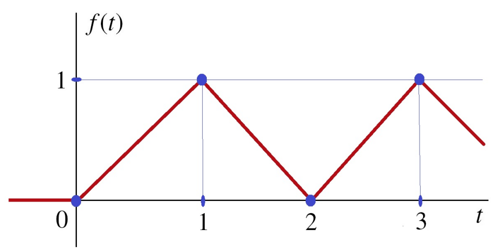
$$\boxed{\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sT}f(t)\,dt.} \tag{۱۹.۳}$$

۷.۶.۳. مثال　فرض کنید $f(t)$ تابعی با تناوب $T=2\pi$ است که در بازه $[0,\pi]$ برابر صفر و در بازه $[-\pi,\pi]$ برابر $-\sin t$ است. لاپلاس آن را بدست آورید.

حل: مطابق (۱۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}f(t)dt\\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} 0dt + \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_\pi^{2\pi} -\sin te^{-st}dt\\ &= \frac{1}{e^{-2\pi s}-1}\cdot\frac{e^{-st}}{1+s^2}(-s\sin t-\cos t)\Big|_{t=\pi}^{t=2\pi}\\ &= \frac{1}{e^{-2\pi s}-1}\cdot\frac{-e^{-\pi s}}{1+s^2}(e^{-\pi}+1)\\ &= \frac{e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{1}{1+s^2}.\end{aligned}$$

۸.۶.۳. مثال لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید:



حل: توجه می‌کنیم که $f(t)$ تابعی با تناوب $T=2$ است و در این بازه:

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{اگر } 0\le t\le 1\\ 2-t & \text{اگر } 1\le t\le 2\end{cases}$$

پس، بنا به (۱۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f(t)e^{-st}dt\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\Big\{\int_0^1 te^{-st}dt+\int_1^2(2-t)e^{-st}dt\Big\}\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\left[\frac{-1}{s^2}(st+1)e^{-st}\right]_0^1+\left[\frac{1}{s^2}(1-2s+st)e^{-st}\right]_1^2\right\}\\ &= \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.\end{aligned}$$

۹.۶.۳. مثال لاپلاس تابع $f(t)=[t]$ را بیابید.

حل: این تابع متناوب نیست، اما، تابع $g(t) = t - f(t) = t - [t]$ متناوب با تناوب $T = 1$ است. بنابراین:

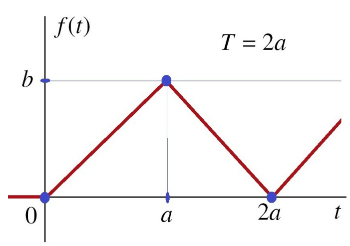
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{g(t)\} &= \mathscr{L}\{t\} - \mathscr{L}\{f(t)\} \\
&= \frac{1}{s^2} - \mathscr{L}\{f(t)\} \\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2} - \mathscr{L}\{g(t)\} \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 f(t) e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 t e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1-e^{-s}} \left[\frac{-1}{s^2}(st+1)e^{-st} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2(1-e^{-s})}\left((s+1)e^{-s} - 1\right) \\
&= \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.
\end{aligned}$$

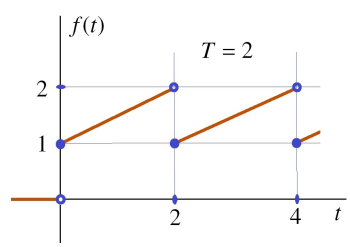
۱۰.۶.۳. تمرینات در هر مورد، لاپلاس تابع متناوب داده شده را بیابید:

1) $f(t) = |\sin t|$, 2) $f(t) = |\cos t|$,

3) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \text{ اگر} \\ -1 & 1 \le t \le 2 \text{ اگر} \end{cases} \qquad T = 3,$

4) $f(x) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \text{ اگر} \\ 0 & 1 \le t \le 2 \text{ اگر} \end{cases} \qquad T = 3.$

5) 

6) 

7) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \pi \le t \le 2\pi \end{cases} \qquad T = 2\pi,$

8) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & 2\pi \le t \le 4\pi \end{cases} \qquad T = 4\pi,$

9) $f(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 2 \\ t-3 & 2 \le t \le 4 \end{cases} \qquad T = 4,$

10) $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & 2 \le t \le 4 \end{cases} \qquad T = 4.$

بخش ۷.۳ تابع ضربه و کانولوشن

۱.۷.۳. تعریف فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ای:

$$\delta_n(t) := \begin{cases} 2n & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \text{ اگر } \\ 0 & |t| \geq \frac{1}{n} \text{ اگر } \end{cases}$$

این تابع همه جا صفر است، به جز در حوالی صفر که $2n$ است. چنانچه n به بینهایت میل کند، تابع $\delta_n(t)$ به تابعی غیرعادی به نام **تابع ضربه** میل می‌کند:

$$\delta(t) := \lim_{n\to\infty} \delta_n(t)$$

ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t)dt \\ &= \lim_{t\to\infty} 2n\left(\frac{1}{n} - \frac{-1}{n}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

۲.۷.۳. قضیه *به ازای هر عدد مثبت a، داریم*

$$\boxed{\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}, \qquad s > 0.} \tag{۲۰.۳}$$

در حالت خاص:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1.} \tag{۲۱.۳}$$

اگر به ازای هر $t \geq 0$ تابع f در t پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر $a > 0$ داریم:

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a).} \tag{۲۲.۳}$$

۳.۷.۳. تعریف فرض کنید $f(t)$ و $g(t)$ توابع هدف هستند. در این صورت **کانولوشن** این توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{(f*g)(t) := \int_0^t f(z)g(t-z)dz} \tag{۲۳.۳}$$

۴.۷.۳. قضیه *اگر f,g,h توابع هدف باشند و a,b اعداد ثابت، در این صورت*

1) $f*(ag+bh) = a(f*g)+b(f*h),$
2) $f*(g*h) = (f*g)*h,$
3) $f*g = g*h.$

۵.۷.۳. قضیه اگر f,g توابع هدف باشند، در این صورت

$$\boxed{\mathscr{L}\{f*g\}=\mathscr{L}\{f\}.\mathscr{L}\{g\}} \tag{۲۴.۳}$$

۶.۷.۳. مثال لاپلاس $\int_0^t ze^z \sin 2z dz$ را بیابید.

حل: کافی است این انتگرال را به (۲۴.۳) مربوط کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\int_0^t ze^z \sin 2z dz\right\} &= \mathscr{L}\{1*te^t\sin 2t\}\\
&= \mathscr{L}\{1\}.\mathscr{L}\{te^t\sin 2t\}\\
&= \frac{1}{s}\mathscr{L}\{t\sin 2t\}\Big|_{s=s-1}\\
&= \frac{-1}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\}'\Big|_{s=s-1}\\
&= \frac{-1}{s}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}'\Big|_{s=s-1}\\
&= \frac{-1}{s}\frac{-4s}{s^2+4}\Big|_{s=s-1}\\
&= \frac{4(s-1)}{s((s-1)^2+4)}.
\end{aligned}$$

۷.۷.۳. مثال معادله انتگرال $y(t)+\int_0^t y(z)(t-z)dz=t$ را حل کنید.

حل: ابتدا از طرفین معادله داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\left\{\int_0^t y(z)(t-z)dz\right\} &= \mathscr{L}(t),\\
\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\{y*t\} &= \frac{1}{s^2},\\
\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\{y\}.\mathscr{L}\{t\} &= \frac{1}{s^2},\\
\mathscr{L}\{y\}+\frac{1}{s^2}\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2},\\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2+1},
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$y=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t.$$

۸.۷.۳. مثال معادله انتگرالی $f(t) = e^{-t} - 2\int_0^t \cos(t-z)f(z)dz$ که به نام معادله ولترا معروف است را حل کنید.

حل: از طرفین رابطه داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{e^{-t}\} - 2\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos(t-z)f(z)dz\right\}\\
&= \frac{1}{1+s} - 2\mathscr{L}\{\cos t * f(t)\}\\
&= \frac{1}{1+s} - 2\mathscr{L}\{\cos t\}.\mathscr{L}\{f(t)\}\\
&= \frac{1}{1+s} - 2\frac{s}{s^2+1}\mathscr{L}\{f\}.
\end{aligned}$$

کافی است این تساوی را برای $\mathscr{L}\{f(t)\}$ حل کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{s^2+1}{(s+1)^2}\\
&= \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}\\
&= \mathscr{L}\{e^{-t}\} - 2\mathscr{L}\{te^{-t}\} + \mathscr{L}\{t^2e^{-t}\}.
\end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

$$f(t) = e^{-t} - 2te^{-t} + t^2e^{-t} = (1-t)^2e^{-t}.$$

۹.۷.۳. تمرینات هر یک از عبارات داده شده را به دست آورید:

1) $(\sin t)*(\cos t)$,
2) $t*\exp(at)$,
3) $\sinh t*\exp(at)$,
4) $t*\sin t$,
5) $1*1*e^t$,
6) $\sin at*\cos bt$.

۷) با محاسبه کانولوشن $f(t) = t^n$ و $g(t) = t^n$، لاپلاس آنها را محاسبه کرده، نشان دهید:

$$\int_0^1 u^n(1-u)^n du = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

لاپلاس هر یک از توابع داده شده را به دست آورید:

8) $\int_0^t e^{t-z}\sin z dz$,
9) $\int_0^t \cos(t-z)e^{2z}dz$,
10) $\int_0^t (t-z)^2\cosh z dz$,
11) $\int_0^t (t-z)^n f(z)dz$,
12) $\int_0^t e^{z(t-z)}z^2dz$,
13) $\int_0^t e^z\delta(z-2)dz$,
14) $t\int_0^t \cos z dz$,
15) $\int_0^t e^{-z}\delta(z-1)dz$,

۱۶) نشان دهید که به ازای هر عدد مثبت a، داریم $u_a(t) = \int_0^t \delta(z-a)dz$.

۱۷) ثابت کنید $\delta * f = f$.

بخش ۸.۳ عملگر معکوس لاپلاس

۱.۸.۳. تعریف در صورتی که $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ می‌نویسیم:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

$\mathscr{L}^{-1}$ را **عملگر معکوس لاپلاس** می‌نامیم.

۲.۸.۳. قضیه *اگر $\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{g(t)\}$، آنگاه $f(t) = g(t) + n(t)$ که $n(t)$ تابعی با خاصیت زیر است:*

$$\forall t > 0 \ : \ \int_0^t n(t)dt = 0.$$

تابع $n(t)$ را تابع پوچ می‌نامند.

۳.۸.۳. نتیجه *اگر $f(t), g(t)$ توابع پیوسته بر $[0,\infty)$ باشند و $\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{g(t)\}$ آنگاه به ازای هر $t \geq 0$ ای $f(t) = g(t)$. به بیان دیگر، $\mathscr{L}^{-1}$ بر مجموعه توابع پیوسته، یک به یک است.*

اطلاعات در خصوص $\mathscr{L}^{-1}$ از اطلاعات نظیر در ارتباط با $\mathscr{L}$ نتیجه می‌گردد. در واقع، باید به عقب برگشت و اطلاعات را به $\mathscr{L}^{-1}$ ترجمه نمود.

۴.۸.۳. قضیه *با توجه به مطالب از پیش گفته شده، داریم:*

$$\begin{aligned}
&1)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, && 2)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t,\\
&3)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, && 4)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin at,\\
&5)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at, && 6)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at},\\
&7)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1}e^{a}}{(n-1)!}, && 8)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(z)dz,\\
&9)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{1}{t}f(t), && 10)\ \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\},\\
&11)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-at}\right\} = u_a(t), && 12)\ \mathscr{L}^{-1}\{1\} = \delta(t),\\
&13)\ \mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t-a), && 14)\ \mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t),\\
&15)\ \mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u_a(t)f(t-a), && 16)\ \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t),\\
&17)\ \mathscr{L}^{-1}\{\delta(t-a)f(t)\} = e^{-as}f(a).
\end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

که در اینجا $F(s)=\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ و $G(s)=\left\{g(t)\right\}$ عددی مثبت است.

۵.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2-s-6}$ را بیابید.

حل: از روش تفکیک کسر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s+2)(s-3)}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4/5}{s+2}+\frac{1/5}{s-3}\right\}\\
&= \frac{4}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\\
&= \frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{1}{5}e^{3t}.
\end{aligned}$$

۶.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s^3+s}$ را بیابید.

حل: از روش تفکیک کسر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} &= \left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-s}{s^2+1}+\frac{1}{s}\right\}\\
&= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\\
&= -\cos t+1.
\end{aligned}$$

۷.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^2+2s+4}$ را بیابید.

حل: از قسمت (۱۶) از (۲۵.۳) و قضیه انتقال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+2s+4}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)^2+3}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2+3}\right\}\\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right\}\\
&\overset{(16)}{=} 2e^{-t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s+(\sqrt{3})^2}\right\}-e^{-t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\}\\
&= 2e^{-t}\cos\sqrt{3}t-e^{-t}\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t.
\end{aligned}$$

۸.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ را بیابید.

حل: با استفاده از قسمت (۸) از (۲۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}dt\\ &= \int_0^t \sin t dt\\ &= -\cos t\Big|_0^t\\ &= 1-\cos t.\end{aligned}$$

۹.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$ را بیابید.

حل: از قسمت (۹) از قضیه (۲۵.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}F'(s) &= \frac{d}{ds}\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\\ &= \frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b},\\ \int_s^\infty\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\} &= \lim_{B\to\infty}\int_s^B\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\\ &= \lim_{B\to\infty}\Big[\ln(s-a)-\ln(s-b)\Big]_s^B\\ &= \lim_{B\to\infty}\ln\left(\frac{B-a}{B-b}\right)-\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\\ &= 0-\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\\ &= -\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\\ &= -F(s).\end{aligned}$$

در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\right\} &= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)ds\right\}\\ &= \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\\ &= \frac{-1}{t}(e^{at}-e^{bt})\\ &= \frac{e^{bt}-e^{at}}{t}.\end{aligned}$$

۱۰.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-1)}$ را بیابید.

حل: از قسمت (۱۴) از (۲۵.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}.\frac{1}{s-1}\right\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}*\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\\ &= t*e^t\\ &= \int_0^t (t-z)e^z dz\\ &= \left[(t-z+1)e^z\right]_0^t\\ &= e^t-t-1\end{aligned}$$

۱۱.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{s}{(s^2+4)^2}$ را بیابید.

حل: با استفاده از قسمت (۱۴) از (۲۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}.\frac{1}{s^2+4}\right\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}*\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}\\ &= \cos 2t*\frac{1}{2}\sin 2t\\ &= \frac{1}{2}(\cos 2t*\sin 2t)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \cos 2z\sin(2t-2z)dz\\ &= \frac{1}{4}\int_0^t [\sin 2t-\sin(4z-2t)]dz\\ &= \frac{1}{4}\left[t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos(4z-2t)\right]_0^t\\ &= \frac{t}{4}\sin 2t.\end{aligned}$$

۱۲.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس $F(s)=e^{-s}/s(s(s-1))$ را بیابید.

حل: از قسمت (۱۰) از (۲۵.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s(s-1)}\right\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}.\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s-1}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s}\right\}\\
&= u_0(t-1).\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\Big|_{t=t-1} - u_0(t-1)\\
&= u_0(t-1).e^t\Big|_{t=t-1} - u_0(t-1)\\
&= u_0(t-1).(e^{t-1}-1).
\end{aligned}$$

۱۳.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y'-y=\begin{cases} 1 & 0\le t<1 \text{ اگر } \\ -1 & 1\le t \text{ اگر } \end{cases} \qquad y(0)=0.$$

حل: ابتدا از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم. برای این کار لازم است سمت راست معادله را بر حسب تابع پله‌ای واحد بنویسیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'\}-\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{1-2u_0(t-1)\},\\
s\mathscr{L}\{y\}-y(0)-\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{1\}-2\mathscr{L}\{u_0(t-1)\},\\
(s-1)\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s}-2e^{-s}.\frac{1}{s},\\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s(s-1)}-2e^{-s}\frac{1}{s(s-1)}.
\end{aligned}$$

حال از لاپلاس معکوس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s(s-1)}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s-1}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}\\
&= e^t-1-2u_0(t-1)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\Big|_{t=t-1}+2u_0(t-1)\\
&= e^t-1-2u_0(t-1)e^t\Big|_{t=t-1}+2u_0(t-1)\\
&= e^t-1+2(1-e^{t-1})u_0(t-1)\\
&= \begin{cases} e^t-1 & 0\le t<1 \text{ اگر } \\ e^t(1-=e^{-1}) & 1\le t \text{ اگر } \end{cases}
\end{aligned}$$

۱۴.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''-y'-6y=\begin{cases} t & 0\le t<1 \text{ اگر } \\ 1 & 1\le t \text{ اگر } \end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

حل: همانند مثال قبل عمل می‌کنیم:

$$\mathscr{L}\{y''\}-\mathscr{L}\{y\}-6\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{t-(t-1)u_0(t-1)\},$$
$$s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)-s\mathscr{L}\{y\}+y(0)-6\mathscr{L}\{y\}=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\mathscr{L}\{t\},$$
$$(s^2-s-6)\mathscr{L}\{y\}=\frac{1}{s^2}-e^{-s}.\frac{1}{s^2},$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2(s-3)(s+2)}(1-e^{-s})\\
&= \left(\frac{1}{36}.\frac{1}{s}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{45}.\frac{1}{s-3}-\frac{1}{20}.\frac{1}{s+2}\right)(1-e^{-s}),\\
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{36}.\frac{1}{s}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{45}.\frac{1}{s-3}-\frac{1}{20}.\frac{1}{s+2}\right\}\\
&\quad -u_0(t-1)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{36}.\frac{1}{s}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s^2}+\frac{1}{45}.\frac{1}{s-3}-\frac{1}{20}.\frac{1}{s+2}\right\}_{t=t-1}\\
&= \left(\frac{1}{36}-\frac{t}{6}+\frac{1}{45}e^{3t}-\frac{1}{20}e^{-2t}\right)-u_0(t-1)\left(\frac{1}{36}-\frac{t}{6}+\frac{1}{45}e^{3t}-\frac{1}{20}e^{-2t}\right)\Big|_{t=t-1}\\
&= \frac{1}{36}-\frac{t}{6}+\frac{e^{3t}}{45}-\frac{e^{-2t}}{20}-u_0(t-1)\left(\frac{1}{36}-\frac{t-1}{6}+\frac{e^{3(t-1)}}{45}-\frac{e^{-2(t-1)}}{20}\right).
\end{aligned}$$

۱۵.۸.۳. مثال لاپلاس معکوس تابع $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$ را بیابید.

حل: از تصاعد هندسی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}.\frac{1}{(1-e^{-s})}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}.(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+1}\right\}+\cdots\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+u_0(t-1)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}_{t=t-1}+\\
&\quad +u_0(t-2)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}_{t=t-2}+\cdots\\
&= e^{-t}+u_0(t-1)e^{-t}\Big|_{t=t-1}+u_0(t-2)e^{-t}\Big|_{t=t-1}+\cdots\\
&= e^{-t}+u_0(t-1)e^{-(t-1)}+u_0(t-2)e^{-(t-2)}+\cdots\\
&= e^{-t}(1+u_0(t-1)e+u_0(t-2)e^2+u_0(t-3)e^3+\cdots).
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $n \le t < n+1$. در این صورت، تساوی بالا برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= e^{-t}(1+1e+1e^2+1e^3+\cdots+1e^n+0e^{n+1}+\cdots) \\
&= e^{-t}\frac{e^{n+1}}{e-1} \\
&= \frac{-e^{-t}}{e-1}+\frac{e^{1-t}}{e-1}e^{[t]}.
\end{aligned}$$

توجه شود که تابع

$$h(t)=\frac{e^{1-t}}{e-1}e^{[t]}=\frac{e}{e-1}e^{[t]-t},$$

متناوب با تناوب $T=1$ است.

۱۶.۸.۳. مثال در صورتی که $f(t)$ تابع با تناوب $T=1$ است که در بازه $0 \le t < 1$ برابر t است، (در واقع $f(t)=t-[t]$) مساله زیر را حل کنید:

$$y'+5y=f(t), \qquad y(0)=0.$$

حل: ابتدا لاپلاس تابع متناوب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'\}+5\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{f(t)\}, \\
s\mathscr{L}\{y\}-y(0)+5\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 f(t)e^{-st}dt, \\
(s+5)\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^t te^{-st}dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{(s+5)(1-e^{-s})}\left[-\frac{st+1}{s^2}e^{-st}\right]_0^1 \\
&= \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(s+5)(1-e^{-s})} \\
&= \frac{1}{s^2(s+5)}\cdot\frac{1}{1-e^{-s}}-\frac{s+1}{s^2(s+5)}\cdot\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} \\
&= \frac{1}{s^2(s+5)}(1+e^{-s}+e^{-2s}+\cdots)-\frac{s+1}{s^2(s+5)}(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots) \\
&\quad +\frac{1}{25}\left(\frac{4}{s+5}-\frac{4}{s}-\frac{5}{s^2}\right)(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots) \\
&= \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}\right)(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots) \\
&= \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)+\frac{e^{-s}}{5(s+5)}+\frac{e^{-2s}}{5(s+5)}+\cdots-\frac{e^{-s}}{5s}-\frac{e^{-2s}}{5s}-\cdots
\end{aligned}$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

اکنون لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{25}\left(\frac{1}{s+5}-\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}\right)\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+5}\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+5}\right\}+ \\
&\quad \cdots-\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}-\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\}-\cdots \\
&= \frac{1}{25}e^{-5t}-\frac{1}{25}+\frac{1}{5}t+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}\Big|_{t=t-1}.u_1(t)+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}\Big|_{t=t-2}.u_2(t)+ \\
&\quad \cdots-\frac{1}{5}u_0(t-1)-\frac{1}{5}u_0(t-2)-\cdots \\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{1}{5}e^{-5(t-1)}.u_1(t)+\frac{1}{5}e^{-5(t-2)}.u_2(t)+ \\
&\quad \cdots+\frac{1}{5}u_0(t-1)-\frac{1}{5}u_0(t-2)-\cdots \\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{1}{5}u_0(t-1)(e^{5(1-t)}-1)+\frac{1}{5}u_0(t-2)(e^{5(t-2)}-1)+\cdots
\end{aligned}$$

پس اگر $n \le t < n+1$ آنگاه

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{1}{5}(e^{5(1-t)}-1)+\frac{1}{5}(e^{5(1-t)}-1)+\cdots+\frac{1}{5}(e^{5(n-t)}-1) \\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{e^{-5t}}{5}(e^5+e^{10}+e^{15}+\cdots+e^{5n})-\frac{n}{5} \\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{e^{-5t}}{5},e^5\frac{e^{5n}-1}{e^5-1}-\frac{n}{5} \\
&= \frac{1}{25}(e^{-5t}-1+5t)+\frac{e^{5(1-t)}}{5}.\frac{e^{[t]}-1}{e^5-1}-\frac{[t]}{5}
\end{aligned}$$

۱۷.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''-2y'+y=3\delta(t-2), \quad y(0)=y'(0)=0.$$

حل: با توجه به مثالهای بالا، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''\}-2\mathscr{L}\{y'\}+\mathscr{L}\{y\} &= 3\mathscr{L}\{\delta(t-2)\}, \\
s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)-2s\mathscr{L}\{y\}+2y(0)+\mathscr{L}\{y\} &= 3e^{-2s}, \\
(s^2-2s+1)\mathscr{L}\{y\} &= 3e^{-2s}, \\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{3e^{-2s}}{(s-1)^2}.
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3e^{-2s}}{(s-1)^2}\right\} \\
&= 3u_0(t-2)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}\Big|_{t=t-2} \\
&= 3u_0(t-2)\left[e^t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right]_{t=t-2} \\
&= 3u_0(t-2)\left[e^t t\right]_{t=t-2} \\
&= 3u_0(t-2).(t-2).e^{t-2}.
\end{aligned}
$$

۱۸.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y'' + \omega^2 y = C\delta(t-T), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0.$$

حل: همانند مثال قبل عمل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \omega^2\mathscr{L}\{y\} &= C\mathscr{L}\{\delta(t-T)\} \\
(s^2+\omega^2)\mathscr{L}\{y\} &= -Ce^{-sT} + v_0 + y_0 s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{ce^{-sT} + v_0 + y_0 s}{s^2+\omega^2}\right\} \\
&= C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-sT}}{s^2+\omega^2}\right\} + v_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} + y_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2\omega^2}\right\} \\
&= Cu_0(t-T)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}\Big|_{t=t-T} + v_0\frac{1}{\omega}\sin\omega t + y_0\cos\omega t \\
&= Cu_0(t-T).\frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-T)) + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + y_0\cos\omega t
\end{aligned}
$$

۱۹.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

حل: با توجه به روش کلی، داریم:

$$
\begin{aligned}
s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{\delta(t-\pi)\cos t\}, \\
(s^2+1)\mathscr{L}\{y\} - s &= e^{-\pi s}\cos\pi, \\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2+1}\left(s - e^{-\pi s}\right),
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} \\ &= \sin t - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Big|_{t=t-\pi}.u_0(t-\pi) \\ &= \sin t - \sin t\Big|_{t=t-\pi}.u_0(t-\pi) \\ &= \sin t + \sin t.u_0(t-\pi) \\ &= \begin{cases} \sin t & 0 \le t < \pi \text{ اگر} \\ 2\sin t & \pi \le t \text{ اگر} \end{cases}. \end{aligned}$$

۲۰.۸.۳. مثال معادله انتگرالی $y(t) = te^t + \int_0^t ty(t-z)dz$ را حل کنید.

حل: در این مساله:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{te^t\} + \mathscr{L}\left\{\int_0^t ty(t-z)dz\right\} \\ &= (-1)\mathscr{L}\{e^t\}' + \mathscr{L}\{t * y(t)\} \\ &= -\left\{\frac{1}{s-1}\right\}' + \mathscr{L}\{t\}\mathscr{L}\{y\} \\ &= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2}\mathscr{L}\{y\}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{s^2}{(s+1)(s-1)^3},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1/8}{s+1} + \frac{1/8}{s-1} + \frac{3/4}{(s-1)^2} + \frac{1/2}{(s-1)^3}\right\} \\ &= -\frac{e^{-t}}{8} + \frac{e^t}{8}(1+6t+2t^2). \end{aligned}$$

۲۱.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y'' + 4y = \sin t + u_\pi(t)\sin(t-\pi), \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

حل:

$$\left(s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)\right) + 4\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\sin t\} + \mathscr{L}\{u_\pi(t)\sin(t-\pi)\},$$

$$(s^2+4)\mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\sin t\},$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}(1+e^{-\pi s}) = \left\{\frac{1/3}{s^2+1} - \frac{1/3}{s^2+4}\right\}(1+e^{-\pi s}),$$

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\left(\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+4}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+4}\right\}\Big|_{t=t-\pi}.u_0(t-\pi) \\ &= \frac{1}{6}(1-u_\pi(t))(2\sin t-\sin 2t). \end{aligned}$$

۲۲.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y''+y=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n\pi), \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

حل: دراین مساله:

$$s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)+\mathscr{L}\{y\}=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathscr{L}\{\delta(t-n\pi)\},$$

$$(s^2+1)\mathscr{L}\{y\}=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi s},$$

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi s}\right\} \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-n\pi s}}{s^2+1}\right\} \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Big|_{t=t-n\pi}.u_{n\pi}(t) \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin t\Big|_{t=t-n\pi}.u_{n\pi}(t) \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(t-n\pi).u_{n\pi}(t) \\ &= a\sum^{\infty} n=1\sin t u_{n\pi}(t) \\ &= a\sin t\sum_{n=1}^{\infty}u_{n\pi}(t) \\ &= a\sin t[\frac{t}{2\pi}]. \end{aligned}$$

۲۳.۸.۳. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$ty''+2y+(2-t)y=2e^t, \qquad y(1)=\sinh 1.$$

حل: در این مساله:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{ty''\}+\mathscr{L}\{y'\}+\mathscr{L}\{2y\}-\mathscr{L}\{ty\} &= 2\mathscr{L}\{e^t\}\\
-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y''\}+2s\mathscr{L}\{y\}-2y(0)+2\mathscr{L}\{y\}+\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\} &= 2\frac{1}{s-1}\\
-\frac{d}{ds}\left(s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\right)+2s\mathscr{L}\{y\}+2\mathscr{L}\{y\}+\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\} &= \frac{2}{s-1}\\
(1-s^2)\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\}+2\mathscr{L}\{y\} &= \frac{2}{s-1}
\end{aligned}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است:

$$\begin{aligned}
h &= \exp\left(\int \frac{2}{1-s^2}ds\right)\\
&= \exp\left(\ln\frac{1+s}{1-s}\right)\\
&= \frac{1+s}{1-s}\\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{1-s}{1+s}\left(\int \frac{1+s}{1-s}.\frac{2}{(s-1)(1-s^2)}ds+c\right)\\
&= \frac{1-s}{1+s}\left(2\int \frac{ds}{(s-1)^3}+c\right)\\
&= \frac{1-s}{1+s}\left(c-\frac{1}{(s-1)^2}\right)\\
&= c\frac{1-s}{1+s}+\frac{1}{s^2-1}\\
&= \frac{2c}{s+1}-c+\frac{1}{s^2-1}\\
y &= 2c\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-c\mathscr{L}^{-1}\{1\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\}\\
&= 2ce^{-t}-c\delta(t)+\sinh t
\end{aligned}$$

اما مطابق فرض $y(1)=\sinh 1$، در نتیجه $\sinh 1 = 2ce^{-1}-0+\sinh 1$ و لذا $c=0$. پس $y(t)=\sinh t$.

۲۴.۸.۳. تمرینات لاپلاس معکوس هر یک از توابع داده شده را بیابید:

1) $\dfrac{2}{s+4}$, 2) $\dfrac{3}{s^2}$, 3) $\dfrac{3s}{s^2+2}$,

4) $\dfrac{5}{s^2+5}$, 5) $\dfrac{1}{s^2+4}-\dfrac{1}{3s^2}$, 6) $\dfrac{s}{s^2-2}-\dfrac{2}{s-4}$,

7) $\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{3}{s+2}-\dfrac{4}{s^3}$, 8) $\dfrac{2}{s^2-2}-\dfrac{3s}{s^2+1}$, 9) $\dfrac{2}{s^4+2s^2}$,

10) $\dfrac{2}{s^4-1}$, 11) $\dfrac{s-2}{(s+2)(s+1)(s-1)}$, 12) $\dfrac{s-1}{(s+2)(s-2)}$,

13) $\dfrac{4s-2}{4s^2+4s+9}$, 14) $\dfrac{1}{(s^2+4)(s^2+9)}$, 15) $\dfrac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}$,

16) $\dfrac{2s^3-2s^2-2s+1}{s^2(s-1)}$, 17) $\dfrac{1+s+3s^3-3s^4}{(s+1)(2s^4+s^2)}$, 18) $\dfrac{6s^5-2s^4-2s^2-s+1}{(s-1)(2s^5-s^3)}$,

19) $\dfrac{1}{(s+a)(1-e^{-ks}}$, 20) $\dfrac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s}}$.

هر یک از مسائل داده شده را حل کنید:

21) $y'+2y=\begin{cases} 2 & 0\le t<3 \\ & 3\le t \end{cases}$, $y(0)=0$,

22) $y'+y=\begin{cases} 1 & 0\le t\le 2 \\ t & 2<t<4 \\ 0 & 4<t \end{cases}$ $y(0)=0$,

23) $y'-5y=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ t^3-1 & 1\le t \end{cases}$ $y(0)=1$,

24) $y''-3y'+2y=\begin{cases} 1 & 0\le t<1 \\ -1 & 2\le t \end{cases}$, $y(0)=0$,

25) $y''-5y'+4y=\begin{cases} 0 & 0\le t<2 \\ 2 & 3\le t \end{cases}$, $y(0)=0, y'(0)=0$,

26) $y''-2y'-3y=\begin{cases} 1 & 0\le t\le 2 \\ 0 & 2\le t<3 \\ 1 & 3\le t \end{cases}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$,

27) $y''+2y'+y=\begin{cases} 1-t & 0\le t<1 \\ 1 & 1\le t \end{cases}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$,

28) $y''-y=tu_0(t-1)-t$, $y(0)=y'(0)=0$,

29) $y''-y'=e^{-t}+e^tu_0(t-3)$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$,

30) $y''+y=\begin{cases} 0 & 0\le t<1 \\ t & 1\le t \end{cases}$ $y(0)=1$, $y'(0)=0$,

31) $y''+2y'=4-3u_0(t-1)$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$,

32) $y''+2y'+y=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 0 & 1\le t \end{cases}$, $T=2$, $y(0)=y'(0)=0$.

۳۳) نشان دهید که اگر $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ -1 & 1 \le t < 2 \end{cases}$ تابعی با تناوب $T = 2$ باشد، آنگاه $\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\tanh\left(\frac{s}{2}\right)$.

۳۴) نشان دهید: $\mathscr{L}\{|\sin t|\} = \frac{1}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ هر یک از مسائل داده شده را حل کنید

35) $y' - 2y = \delta(t-3), \quad y(0) = 0,$

36) $y' + 3y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0,$

37) $y' - 3y = \delta(t-2), \quad y(0) = -1,$

38) $y'' - 5y' + 4y = \delta(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0,$

39) $y'' + 3y' - 4y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$

40) $y'' + y' - 2y = 4\delta(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 1,$

41) $y'' - 4y = t\delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$

42) $y'' + y = \delta(t-2\pi)\sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$

43) $y(t) + 2\int_0^t y(t-z)\cos z\, dz = 1,$

44) $y(t) + \int_0^t y(z)\, dz = t,$

45) $\int_0^t y(z)\sin(t-z)\, dz = t^3,$

46) $\int_0^t e^{t-z} y(z)\, dz = t,$

47) $y(t) = \sin t + \int_0^t e^{t-z} y(z)\, dz,$

48) $y(t) = t^2 - 2\int_0^t y(t-z)\sinh 2z\, dz,$

49) $y'' - 3y' + 2y = \cos e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

50) $f(t) = t + 2\int_0^t \{(t-z) - \sin(t-z)\} f(t)\, dz,$

51) $y(t) = \sinh t - \int_0^t \cosh(t-z) y(z)\, dz,$

52) $y(t) = 1 - 2t - 4t^2 + \int_0^t \{3 + 6(t-z) - 4(t-z)^2\} y(z)\, dz,$

53) $y'' + y = \frac{1}{4 + \tan^2 t}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

54) $y''' + y' = \frac{1}{(2 + \sin t)}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$

55) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

لاپلاس توابع داده شده را بیابید:

$$56)\ \frac{1}{s}\arctan\Big(\frac{1}{s}\Big),\qquad 57)\ \ln\Big(1+\frac{a^2}{s^2}\Big),\qquad 58)\ \frac{1}{a}\exp\Big(-\frac{b}{a}t\Big)f\Big(\frac{t}{a}\Big).$$

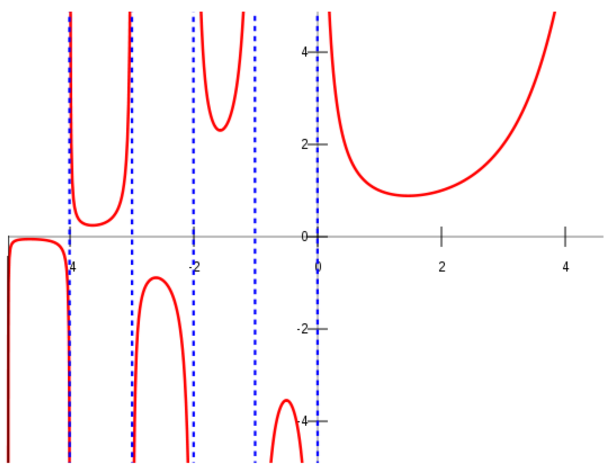
بخش ۹.۳ تابع گاما، بسل و لژاندر

شاید از دید کسی که با ریاضیات عالی آشنا نیست، سخن گفتن از $\frac{1}{2}!$ عجیب باشد! اما این موضوع و بسیاری دیگر ممکن است.

۱.۹.۳. تعریف تابع گامای k، با نماد $\Gamma(k)$ را به صورت انتگرال ناسره:

$$\boxed{\Gamma(k) := \int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx,} \tag{۲۶.۳}$$

تعریف می‌کنیم. این انتگرال همواره موجود است مگر وقتی که k صفر و یا صحیح منفی باشد.



نمودار تابع گاما $\Gamma(x)$

۲.۹.۳. قضیه *اگر $k\in\mathbb{R}-\{0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots\}$، آنگاه*

$$1)\ \Gamma(1)=1,\qquad 2)\ \Gamma(k)=\frac{1}{k}\Gamma(k+1),$$

$$3)\ \forall k\in\mathbb{Z}\ :\ \Gamma(k+1)=k!,\qquad 4)\ \Gamma\Big(\frac{-1}{2}\Big)=-2\sqrt{\pi}.$$

۳.۹.۳. مثال نشان دهید $\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

حل: به کمک تعریف، داریم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t^{-1/2}\right\} &= \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-st}dt\\ &= \int_0^\infty t^{1/2-1}e^{-st}dt.\end{aligned}$$

اکنون از تغییر متغیر $u = st$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t^{-1/2}\right\} &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^{1/2-1} e^{-u}\frac{du}{s}\\ &= \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty u^{1/2-1}e^{-u}du\\ &= \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

۴.۹.۳. مثال لاپلاس $t^{n-1/2}$ که $n \in N$ را به دست آورید.

حل: فرض کنیم $F_n(s) := \mathscr{L}\left\{t^{n-1/2}\right\}$، در این صورت

$$\begin{aligned}F_n(s) &= \mathscr{L}\left\{t.t^{n-1-1/2}\right\}\\ &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{t^{n-1-1/2}\right\}\\ &= -\frac{d}{ds}F_{n-1}(s)\\ &= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F_{n-2}(s)\\ &= \cdots\\ &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F_0(s)\\ &= (-1)^n\sqrt{\pi}\frac{d^n}{ds^n}s^{-1/2}\\ &= (-1)^n\sqrt{\pi}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)s^{-1/2-n}\\ &= \frac{1\times3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}s^{-(n+1/2)}\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!}\sqrt{\pi}s^{-(n+1/2)}.\end{aligned}$$

۵.۹.۳. مثال لاپلاس $t^{n-1/2}e^{at}$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t^{n-1/2}e^{at}\right\} &= \mathscr{L}\left\{t^{n-1/2}\right\}\Big|_{s-a}\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!}\sqrt{\pi}(s-a)^{-(n+1/2)}.\end{aligned}$$

۶.۹.۳. تعریف اگر p عددی صحیح دلخواه باشد، تابع بسل از مرتبه p ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{J_p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}.} \tag{۲۷.۳}$$

۷.۹.۳. قضیه *با نمادهای بالا داریم:*

$$1)\quad \mathscr{L}\left\{J_0(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \qquad 2)\quad J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t}J_n(t) - J_{n-1}(t),$$

$$3)\quad \mathscr{L}\left\{J_n(t)\right\} = \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^n}{\sqrt{1+s^2}}, \qquad 4)\quad J_n(t) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)),$$

$$5)\quad \mathscr{L}\left\{t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})\right\} = \frac{e^{-1/s}}{s^{n+1}}.$$

۸.۹.۳. تعریف اگر n عددی صحیح و نامنفی باشد، n امین چند جمله‌ای لژاندر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left\{(t^2-1)^n\right\}.} \tag{۲۸.۳}$$

۹.۹.۳. نتیجه *با توجه به تعریف بالا داریم:*

$$1)\quad P_0(t) = 1, \qquad 2)\quad P_1(t) = t,$$

$$3)\quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1), \qquad 4)\quad P_2(t) = \frac{1}{2}(5t^2-3t),$$

$$5)\quad P_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d}{dt^n}(t^n e^{-t}), \qquad 6)\quad \mathscr{L}\left\{P_n(t)\right\} = \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}\right)^n.$$

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سریها

چنانچه جواب یک معادله دیفرانسیل به صورت صریح، ضمنی و یا پارامتری برحسب توابع مقدماتی ممکن نباشد، نظیر معادله آیرس $y'' + xy = 0$ روشهای در پیش گفته شده به کار نمی‌آیند. دو روش کلی برای این وضعیت وجود دارد: روش عددی و روش سریها. در روش عددی، جواب مساله به طور تقریبی با تقریب مناسب به دست می‌آید. موضوع این فصل، روش دوم یعنی روش سریها است. برای پرداختن به این بحث نیاز به آشنایی با سریهای تیلور می‌باشد. [۱]

بخش ۱.۴ سری توان

۱.۱.۴. تعریف سری توان عبارتی است به شکل:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots,$$

که $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ اعداد ثابتند و ضرایب سری نامیده می‌شوند. معنی دقیق سری بالا چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n\right\}.$$

سری توان بالا را به صورت خلاصه با نماد $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ نیز نشان می‌دهند.

که صورتی می‌گوییم سری توان همگرا در $x = x_1$ است که اگر در آن به جای x از x_1 استفاده شود، حد دنباله حاصل موجود باشد.

۲.۱.۴. قضیه *فرض $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یک سری توان است. عدد $R \in [0, +\infty]$ با تعریف:*

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad \text{یا} \quad R = \lim_{n\to\infty} 1 \equiv \sqrt[n]{|s_{n+1}|},} \tag{۱.۴}$$

[۱] — آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ — تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa4.pdf

را شعاع همگرایی سری می‌نامیم. در این صورت

الف) اگر $|x_1 - x_0| < R$، آنگاه سری به ازای $x = x_1$ همگرای مطلق است. به این معنی که سری عددی
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_1 - x_0| < R$$
همگرا است.

ب) اگر $|x_1 - x_0| > R$، آنگاه سری به ازای $x = x_0$ واگرا است.

۳.۱.۴. تعریف مجموعه همه x هایی که سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای آن همگرا است را دامنه همگرایی سری می‌نامند و با نماد DC نشان می‌دهند. بنا به قضیه ۲-۱-۴ داریم:

$$\boxed{(-R,R) \subseteq DC \subseteq [-R,R].} \qquad (۲.۴)$$

توجه شود که ممکن است $R = 0$ یا $R = \infty$ شود!

۴.۱.۴. مثال دامنه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ۲.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین $(-1,1) \subseteq DC \subseteq [-1,1]$، باید نقاط $x = 1$ و $x = -1$ را جداگانه تحلیل کنیم:

$$\begin{aligned} x = 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{واگرا} \\ x = -1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \quad \text{همگرا به } \ln 2 \end{aligned}$$

بنابراین $DC = [-1,1)$.

۵.۱.۴. مثال دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ۲.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty. \end{aligned}$$

بنابراین $DC = (-\infty,+\infty) = R$ و سری به ازای کلیه مقادیر همگرا است.

۶.۱.۴. مثال دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-!)^n}{2^n}(x-1)^n$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ۲.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} 1 \div \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \div \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|} = 3. \end{aligned}$$

بنابراین $[-1,3] \subseteq DC \subseteq (-1,3)$ نقاط $x = 3, x = -1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$\text{واگرا} \quad x = -1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

$$\text{واگرا} \quad x = 3 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

پس $DC = (-1,3)$.

۷.۱.۴. قضیه *فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای $x \in DC$. در این صورت*

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

۸.۱.۴. تعریف فرض کنید $y = f(x)$ در $n = x_0$ بینهایت بار مشتق پذیر است. سری تیلور f در x_0 را به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$$

را سری تیلور f در x_0 می‌نامیم. اگر $x_0 = 0$، سری را مک لورن می‌نامم.

اگر این سری در یک همسایگی از x_0 با خود تابع $y = f(x)$ برابر باشد، می‌گوییم تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = x_0$ تحلیلی است.

بنابه ۵-۱-۴ حد مجموع یک سری توان در نقطه مرکزش تحلیلی است.

۹.۱.۴. مثال سریهای مک لورن زیر در ادامه به کار می‌آیند:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, && DC = \mathbb{R}, \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, && DC = \mathbb{R}, \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, && DC = \mathbb{R}, \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \cdots, && DC = (-1,1], \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, && DC = (-1,1).
\end{aligned} \tag{۳.۴}$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

۱۰.۱.۴. مثال این طور نیست که هر تابع بینهایت بار مشتق پذیر، تحلیلی باشد. مثلا:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x \le 0 \end{cases}$$

در نقطه $x = 0$ بینهایت بار مشتق پذیر بوده و تمام مشتقات آن در $x = 0$ صفر است. در حالی که f در حوالی $x = 0$ صفر نیست، پس f در $x = 0$ تحلیلی نیست.

۱۱.۱.۴. قضیه *فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یک سری توان با شعاع همگرایی R است. در این صورت*

$$1)\qquad \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{d}{dx}(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$2)\qquad \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^b(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^n\Big|_a^b.$$

شعاع همگرایی هر دو سری حاصل بزرگتر یا مساوی شعاع همگرایی سری R است. به علاوه لازم است که $[a,b] \subseteq DC$.

۱۲.۱.۴. قضیه *شرط لازم و کافی برای اینکه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ این است که به ازای هر n ای $a_n = b_n$.*

۱۳.۱.۴. مثال معادله $y' = y$ را به روشهای سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک جواب معادله است. در این صورت $y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ و لذا:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0, \\ (a_1-a_0)+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2)x^2+\cdots &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین، باید کلیه ضرایب صفر باشند:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 = 0, &\implies a_1 = a_0, \\ 2a_2 - a_1 = 0, &\implies a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0, \\ 3a_3 - a_2 = 0, &\implies a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6}a_0, \\ na_n - a_{n-1} = 0, &\implies a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{n!}a_0, \end{aligned}$$

و در مجموع داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{n!}x^n = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

که $a_0 = y(0)$. این جواب با جوابی که از حل معادله تفکیک پذیر $y' = y$ نتیجه می‌گردد، یکی است.

۱۴.۱.۴. مثال معادله $y''+y=0$ را به روشهای سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب مساله است، در این صورت

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\qquad y''=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= 0,\\ (2a_2+a_0)+(6a_3+a_1)x+(12a_4+a_2)x^2+\cdots & \\ \cdots+(n(n-1)a_n-a_{n-2})x^{n-2}+\cdots &= 0.\end{aligned}$$

پس باید همه ضرایب صفر باشند:

$$\begin{aligned}2a_2+a_0=0, &\quad\Longrightarrow\quad a_2=\frac{-1}{2}a_0,\\ 6a_3+a_1=0, &\quad\Longrightarrow\quad a_3=\frac{-1}{6}a_1,\\ &\quad\vdots\\ n(n-1)a_n+a_{n-1}=0, &\quad\Longrightarrow\quad a_n=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-1}.\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}y &= (a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots)+(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots)\\ &= a_0\big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cdots\big)+a_1\big(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots\big).\end{aligned}$$

پس جواب این معادله عبارتست از:

$$y=a_0\cos t+a_1\sin t.$$

۱۵.۱.۴. مثال معادله $y''+xy'+y=0$ را به روش سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n$ یک جواب معادله است. دراین صورت

$$\Big(\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\Big)+x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\Big)+\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)=0.$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

پس باید ضریب همه توانهای x صفر باشد.

$$
\begin{aligned}
2a_2 + a_0 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}a_0,\\
6a_3 + a_1 + a_1 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_1,\\
12a_4 + 2a_2 + a_2 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_1,\\
\vdots \qquad &\qquad\qquad \vdots\\
(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+2}a_n.
\end{aligned}
$$

بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
y &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots\\
&= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \cdots + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})\cdots(\frac{-1}{2n})2x^{2n} + \cdots\right)\\
&\quad + a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \cdots + (-\frac{1}{3})(-\frac{1}{5})\cdots(-\frac{1}{2k+1}x^{2k} + \cdots\right)\\
&= a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \cdots + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{5})\cdots(\frac{-1}{2k+1})x^{2k} + \cdots\right)\\
&= a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\times4\times\cdots\times(2k)}x^{2k} + a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3\times5\times\cdots\times(2k+1)}x^{2k+1}.
\end{aligned}
$$

۱۶.۱.۴. مثال معادله $(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$ را بر بازه $(-1,1)$ حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = \sum^{\infty} n = 0 a_n x^n$ یک جواب مساله است. دراین صورت

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1} - 6x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= 0,\\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n - 6\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= 0.
\end{aligned}
$$

پس باید ضریب همه توانهای x صفر باشد:

$$
\begin{aligned}
2a_2 - 4a_0 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_2 = 2a_0,\\
6a_3 - 6a_1 - 4a_1 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_3 = \frac{5}{3}a_1,\\
12a_4 - 2a_2 - 4a_2 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_4 = \frac{3}{2}a_2,\\
20a_5 - 2a_3 - 18a_3 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_5 = \frac{7}{5}a_3,\\
\vdots \qquad &\qquad\qquad \vdots\\
(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}a_n,
\end{aligned}
$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{2k+2}{2k}a_{2(k-1)} \\ &= \frac{2k+2}{2k}\cdot\frac{2k}{2k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{4}{2}a_0 \\ &= (k+1)a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{2k+3}{2k+1}a_{2k-1} \\ &= \frac{2k+3}{2k+1}\cdot\frac{2k+1}{2k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}a_1 \\ &= \frac{2k+3}{3}a_1. \end{aligned}$$

پس در مجموع:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} \\ &= a_0\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k} + a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+3}{3}x^{2k+1} \\ &= a_0\sum_{k=0}^{\infty}k(x^2)^k + a_0\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k} + \frac{2}{3}xa_1\sum_{k=0}^{\infty}k(x^2)^k + a_1x\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k} \\ &= a_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\right)'\Big|_{\theta=x^2} + a_0\frac{1}{1-x^2} + \frac{2}{3}xa_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\right)'\Bigg|_{\theta=x^2} + a_1x\frac{1}{1-x^2} \\ &= a_0\frac{2x}{1-x^2} + \frac{a_0}{1-x} + \frac{2}{3}xa_1\frac{2x}{1-x^2} + a_1\frac{x}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{4}{3}a_1x^2 + (3a_0+a_1)x + a_0\right\}. \end{aligned}$$

۱۷.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y'' - (x+1)y' + x^2y = x, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y_nx^n$ جواب مساله است که $y_n = f^{(n)}(0)$. بنا به فرض مساله $y_0 = y_1 = 1$. بعلاوه

$$y_1 = y''(0) = (0+1)y(0) - (0)^2y(0) + (0) = 1.$$

اگر از طرفین معادله داده شده نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$y''' - (x+1)y'' + (x^2-1)y' + 2xy = 1.$$

در نتیجه:

$$y_3 = y'''(0) = ((0)+1)y_2 - ((0)^2-1)y_1 - 2(0)y_0 + 1 = 3.$$

به طور مشابه:

$$y_4 = y^{(4)}(0) = \{(x+1)y''' + (2-x^2)y'' - 4xy' - 2y\}_{x=0} = 3$$

و ... .

پس در مجموع داریم:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \cdots.$$

۱۸.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$(1-x^2)y'' + xy' - y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است. در این صورت

$$\begin{aligned} (1-x^2)(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots) + x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) & \\ -(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) &= 0, \\ (2a_2 - a_0) + 6a_3x + (12a_4 - a_2)x^2 + (20a_5 - 4a_3)x^3 + \cdots & \\ \cdots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + na_n - a_n)x^n + \cdots &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 2a_2 - a_0, &\implies a_2 = \frac{1}{2}a_0, \\ 6a_3 = 0, &\implies a_3 = 0, \\ 12a_4 - a_2 = 0, \implies a_4 = \frac{1}{12}a_2 &\implies a_2 = \frac{1}{24}a_0, \\ &\vdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+1} - (n-1)^2 a_n = 0, &\implies a_{n+2} = \frac{n^2-2n+1}{n^2+3n+2}a_n. \end{aligned}$$

نتیجه اینکه همه ضرایب فرد صفرند و بعلاوه

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{a_0}{(2k-1)(2k)(2k-2)\cdots(4)(2)} \\ &= \frac{a_0}{(2k-1)2^k k!}. \end{aligned}$$

اما مطابق فرض $y(0) = 1$، پس $a_0 = 1$. از طرفی $y'(0) = 1$ پس $a_1 = 1$. بنابراین:

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k-1)2^k k!}.$$

۱۹.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$xy''' + y' = y, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 0, \qquad y''(1) = 1.$$

حل: چون دامنه این معادله $R - \{0\}$ است ($y''' = (y - y')/x$) پس تنها در یک همسایگی به شعاع حداکثر یک از نقطه $x = 1$ می‌توان دنبال جواب گشت. فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ جوابی برای مساله است و $0 < x < 2$، در این صورت

$$\begin{aligned} & x(6a_3 + 24a_4(x-1) + 60a_5(x-1)^2 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-1)^{n-3} + \cdots) \\ & \quad +(a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \cdots + na_n(x-1)^{n-1} + \cdots) \\ = & \quad a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_n(x-1)^n + \cdots \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & (6a_3 + a_1 - a_0) + (24a_4 + 12a_3 + 2a_2)(x-1) + (60a_5 + 48a_4 + 9a_3) + a_2)(x-1)^2 + \cdots \\ & \quad +((n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3} + (n+2)(n+1)a_{n+2} \end{aligned}$$

پس با صفر قرار دادن همه ضرایب داریم:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{6}(a_0 - a_1) \\ a_4 &= \frac{1}{24}(-12a_3 - 2a_2) \\ a_5 &= \frac{1}{60}(-48a_4 - 9a_3 - a_2)\cdots \\ a_{n+3} &= -\frac{(n+2)(n+1)na_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

اما مطابق فرض $a_0 = y(1) = 1$، $a_1 = y'(1) = 0$ و $a_2 = \frac{1}{2}y''(1) = \frac{1}{2}$. با قرار دادن اینها در فرمولهای بالا داریم:

$$a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = -\frac{1}{8}, a_5 = \frac{1}{15}, \cdots$$

در نتیجه جواب مساله چنین است:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{8}(x-1)^4 + \frac{1}{15}(x-1)^4 + \cdots$$

۲۰.۱.۴. مثال معادله $y'' + \sin xy' + e^x y = 0$ را حل کنید.

حل: ضرایب این معادله چند جمله‌ای نیستند، پس آنها را بر حسب سری لورن بسط می‌دهیم:

$$y'' + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{125} - \cdots\right)y' + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)y = 0$$

حال فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است در این صورت

$$\begin{aligned}&(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots) + \\ &\quad +(x - x^3/6 + x^5/125 - \cdots) \times (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) + \\ &\quad +(1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \cdots) \times (a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \cdots) = 0\end{aligned}$$

به بیان دیگر داریم:

$$(2a_2 + a_0) + (6a_3 + 2a_1 + a_0)x + (12a_4 + 3a_2 + a_1 + a_0/2)x^2 + (20a_5 + 4a_3 + a_2 + a_1/3 + a_0/6)x^3 + \cdots = 0$$

با صفر قرار دادن ضریب توانهای مختلف داریم:

$$\begin{aligned}a_2 &= -\frac{a_0}{2}, a_3 = -\frac{1}{6}(2a_1 + a_0) \\ a_4 &= -\frac{1}{12}(2a_0 - a_1), a_5 = \frac{1}{20}a_0 + a_1, \cdots\end{aligned}$$

پس در مجموع داریم:

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right)$$

که a_0 و a_1 ضرایب دلخواه هستند.

۲۱.۱.۴. تمرینات هر یک از معادلات زیر را به روش سریها حل کنید:

1) $y'' + 2y' = 0,$ 2) $(1 + x)y'' - y = 0,$
3) $y'' + 2y' + y = 0,$ 4) $(1 - x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0,$
5) $y'' + 4y = 0,$ 6) $(x^2 - 1)y'' + 2xy - 2y = 0,$
7) $y'' - 3y' + 2y = 0,$ 8) $x(x + 1)y'' + (x + 1)y' - y = 0,$
9) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$ 10) $xy'' - (x + 2)y' + 2y = 0,$
11) $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$ 12) $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0,$
13) $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0,$ 14) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

هر یک از مسائل زیر را به روش سریها حل کنید:

15) $y'' + xy' - x^2y = 0,\qquad y(0) = 1,\qquad y'(0) = -1,$
16) $x(3-2x)y'' - 6(1-x)y' - 6y = 0,\qquad y(1) = 1,\qquad y'(1) = 0,$
17) $(x^2+1)y'' + 6xy' + 6y = 0,\qquad y(0) = 0,\qquad y'(0) = 1,$
18) $y' - xy + x^2 = 0,\qquad y(0) = 2,$
19) $x^2y'' = x + 1,\qquad y(1) = 1,\qquad y'(1) = 0,$
20) $xy'' + x^2y' - 2y = 0,\qquad y(1) = 0,\qquad y'(1) = -1,$
21) $y'' + 3xy' + e^xy = 2x,\qquad y(0) = 1,\qquad y'(0) = -1,$
22) $x^2y'' - 2xy' + (\ln x)y = 0,\qquad y(1) = 0,\qquad y'(1) = 1/2,$
23) $(1-x)y''' - 2xy' + 3y = 0,\qquad y(0) = 1,\qquad y'(0) = -1,$
24) $y'' \ln x = (\sin x).y,\qquad y(e) = 1/e,\qquad y'(e) = 0,$
25) $y''' + x\sin y = 0,\qquad y(0) = \pi/2,\qquad y'(0) = 0,$
26) $y'' - (1+x^2)y = 0,\qquad y(0) = -2,\qquad y'(0) = 2.$

بخش ۲.۴ سری فروبینیوس

روش سریها به گونه‌ای در بخش قبل گفته شد، در مواردی به موفقیت نمی‌انجامد. به مثال زیر توجه شود:

۱.۲.۴. مثال معادله اولر $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ را به روش سریها حل کنید.

حل: فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است، در این صورت

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

بنابراین ضریب $x^n, x^3, x^2, x, 1$ به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned}
-3a_0 = 0 &\implies a_0 = 0\\
-a_0 - 3a_1 = 0 &\implies a_1 = 0\\
2a_2 - 2a_2 - 3a_2 = 0 &\implies a_2 = 0\\
6a_3 - 3a_3 - 3a_3 = 0 &\implies 0a_3 = 0 \implies \text{دلخواه است}\ a_3\\
n(-1)a_n - na_n + 3a_n = 0 &\implies a_n = 0
\end{aligned}$$

بنابراین $y = a_3x^3$ که a_3 دلخواه است. اما اینها تمام جوابهای معادله نیستند. می‌دانیم که جواب عمومی این معادله اولر عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ y = Ax^3 + B\frac{1}{x}.$$

این مشکل از آنجا ناشی می‌شود که ممکن است جواب مساله مورد نظر در حوالی نقطه‌ای که انتظار داریم حل شود، تحلیلی نباشد! برای حل این مشکل از نوع دیگری از سریهای تابعی به نام سری فروبینیوس استفاده می‌کنیم.

۲.۲.۴. تعریف نقطه $x = x_0$ را در صورتی یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

است که توابع $f(x), a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{n-2}(x), a_{n-1}(x)$ در نقطه $x = x_0$ تحلیلی باشند. در غیر این صورت نقطه $x = x_0$ را یک نقطه تکین می‌نامیم.

۳.۲.۴. مثال فرض کنید $x(x-1)y'' + y' - 2xy = 0$، در این صورت

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2}{x-1}y = 0.$$

که توابع ضریب $a_0 = 2/(x-1), a_1 = 1/x(x-1)$ هستند. تابع a_1 در همه جا به جز $x = 0$ و $x = 1$ تحلیلی است و a_0 در همه جا به جز $x = 1$ تحلیلی است. پس کلیه نقاط، عادی این معادله هستند، به جز $x = 0$ و $x = 1$.

۴.۲.۴. مثال معادله $\cos x . y'' + \sin x . y' + y = x$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1 = \tan x, \quad a_0 = \sec x, \quad f = x \sec x.$$

این توابع در همه جا تحلیلی هستند به جز در نقاطی که $\tan x = 0$ یعنی $x = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$.

۵.۲.۴. تعریف معادله $\mathscr{E} : y'' + a_0(x)y' + a_0(x)y = 0$ را در نظر بگیرید. نقطه تکین $x = x_0$ را در صورتی یک نقطه تکین عادی $\mathscr{E}$ گوییم که توابع $(x-x_0)a_1(x)$ و $(x-x_0)^2a_0(x)$ در نقطه $x = x_0$ تحلیلی باشد. در غیر این صورت $x = x_0$ را نقطه تکین نامنظم می‌نامند.

۶.۲.۴. مثال مثال (۱) از ۳-۲-۴ را در نظر بگیرید. در این صورت نقطه $x = 0$ منظم عادی است. زیرا

$$(x-0)a_1(x) = x.\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \qquad (x-0)^2a_0(x) = x^2.\frac{2}{x-1}.$$

که هر دو در $x = 0$ تحلیلی هستند. نقطه $x = 1$ نیز تکین عادی است. زیرا

$$(x-1).a_1(x) = (x-1).\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}, \qquad (x-1)^2.a_2(x) = 2(x-1).$$

که هر دو در $x = 1$ تحلیلی هستند.

۷.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E} : x^2(x-1)y'' + y' + 2x^2y = 0$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1 = 1/x^2(x-1)^2, \qquad a_0 = 2/(x-1)^2.$$

در نتیجه $x = 0$ و $x = 1$ نقاط تکین $\mathscr{E}$ هستند. به علاوه

$$(x-0).a_1(x) = 1/x(x-1)^2, \qquad (x-0)^2.a_0(x) = 2x^2/(x-1),$$

که تابع اول در $x = 0$ تحلیلی نیست. پس $x = 0$ تکین نامنظم است. به علاوه

$$(x-1).a_1(x) = 1/x^2(x-1), \qquad (x-1)^2.a_0(x) = 2,$$

که تابع اول در $x = 1$ تحلیلی نیست. پس $x = 1$ نیز تکین نامنظم است.

۸.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}: (x^2-9)y''+(x-3)y'+2y=0$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1(x)=\frac{1}{(x+3)^2(x-3)}, \qquad a_0(x)=\frac{2}{(x+3)^2(x-3)^2}.$$

پس نقاط $x=3$ و $x=-3$ نقاط تکین معادله $\mathscr{E}$ هستند. ملاحظه می‌شود که

$$(x+3).a_1(x)=\frac{1}{(x+3)(x-3)}, \qquad (x+3)^2.a_0(x)=\frac{2}{(x-3)^2},$$

که اولی در $x=-3$ تحلیلی نیست. پس $x=-3$ یک نقطه تکین نامنظم $\mathscr{E}$ است. بعلاوه

$$(x-3).a_1=\frac{1}{(x+3)^2}, \qquad (x-3)^2.a_0(x)=\frac{2}{(x+3)^2},$$

که هر دو در $x=3$ تحلیلی هستند. پس $x=3$ یک نقطه تکین منظم $\mathscr{E}$ است.

۹.۲.۴. قضیه (قضیه فروبینیوس) *فرض کنید $x=x_0$ یک نقطه تکین منظم معادله دیفرانسیل:*

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0,$$

است. در این صورت حداقل یک جواب به شکل:

$$\boxed{y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}.} \tag{۴.۴}$$

برای این معادله وجود دارد، که r عددی حقیقی و ثابت است. این جواب در همسایگی ای سفته به شکل $0<|x-x_0|<R$ همگرا است.

۱۰.۲.۴. مثال (مثال (ادامه مثال ۱.۲.۴)) در معادله اولر آمده در ۱-۲-۴ فرض می‌کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$. در این صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0.$$

ضریب اولین جمله (یعنی x^r) عبارتست از:

$$r(r-1)a_0-ra_0-3a_0=0.$$

با فرض $a_0\neq 0$ (زیرا اگر $a_0=0$، آنگاه r تغییر می‌کند)، نتیجه می‌گیریم $(r-3)(r+1)=0$. بنابراین $r=-1$ یا $r=3$ از طرفی ضریب x^{n+r} عبارتست از

$$(n+r-3)(n+r+1)a_n=0.$$

چنانچه $r=-1$ ضریب مذکور $(n-4)na_n=0$ می‌شود و لذا اگر $n\neq 0$ و $n\neq 4$. آنگاه الزاما $a_n=0$. پس تنها a_0 و a_4 می‌توانند مخالف صفر باشند. در نتیجه:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_0x^{-1}+a_4x^3.$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

اما اگر $r = 3$، آنگاه ضریب x^{n+r} به صورت $n(n+4)a_n = 0$ می‌شود. پس اگر $n \neq 0$ آنگاه $c_n = 0$. در نتیجه تنها c_0 ممکن است مخالف صفر باشد. در نتیجه:

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^{n+3} = a_0 x^3.$$

پس در هر حال جواب عمومی معادله مذکور عبارتست از:

$$\mathscr{S} : y = Ax^{-1} + Bx^3.$$

۱۱.۲.۴. قضیه *فرض کنید $\mathscr{E} : y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ معادله‌ای دیفرانسیل است و $x = x_0$ یک نقطه تکین عادی آن است. فرض کنید:*

$$\begin{aligned} u &:= \lim_{x\to x_0} (x-x_0)a_1(x), \\ v &:= \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 a_0(x). \end{aligned}$$

فرض کنیم معادله مشخصه

$$\boxed{C_{\mathscr{E}} : r(r-1) + ur + v = 0,} \qquad (۵.۴)$$

دارای دو ریشه حقیقی r_1 و r_2 است که $r_2 \leq r_1$. در این صورت

الف) اگر تفاضل $r_1 - r_2$ با عددی صحیح مثبت و یا صفر برابر نباشد $(r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$. در این معادله $\mathscr{E}$ دو جواب به شکل

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \\ y_2 &= x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n, \end{aligned}$$

است که $a_0 \neq 0 \neq b_n$.

ب) اگر $r_1 - r_2$ عددی صحیح و مثبت باشد $(r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$. در این صورت ϵ دارای یک جواب به شکل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

است که $a_0 \neq 0$. جواب دیگر این معادله ممکن استبه شکل $x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ یا

$$y_2 = Cy_1 \ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n,$$

که C و b_0 اعداد مخالف صفرند، باشد.

ج) اگر $r_1 = r_2$، در این صورت $\mathscr{E}$ تنها یک جواب به شکل:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

که $a_0 \neq 0$. جواب دیگر این معادله به شکل

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

است که $b_0 \neq 0$ می‌باشد.

۱۲.۲.۴. مثال معادله $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$ را حل کنید.

حل: نقطه $x = 0$ تنها نقطه تکین معادله است و این نقطه، یک نقطه تکین منظم است. در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{3}{2x} = \frac{3}{2}, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2 a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{-1-x}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(-1-x)}{2} = -1/2, \end{aligned}$$

و معادله مشخصه آن چنین است:

$$C_{\mathscr{E}} \,:\, r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0, \;\Rightarrow\; 2r^2 + r + 1 = 0.$$

پس $(2r - 1)(r + 1) = 0$ و بنابراین $r_1 = 1/2$ و $r_2 = -1$. چون $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ صحیح مثبت و یا صفر نیست، حالت الف از ۸-۲-۴ است.

در معادله داده شده فرض می‌کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$، در این صورت

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \big\{2(r+1)r + 3(r+1) - 1\big\}a_1 - a_0 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a_1 = \frac{a_0}{(2r+1)(r+2)}, \\ \big\{2(r+2)(r+1) + 3(r+2) - 1\big\}a_2 - a_1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a_2 = \frac{a_1}{(2r+3)(r+3)}, \\ &\vdots \\ \big\{2(r+n)(r+n-1) + 3(r+n) - 1\big\}a_n - a_{n-1} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{(2r+2n-1)(r+n+1)}. \end{aligned}$$

پس اگر فرض کنیم $r = r_1 = \frac{1}{2}$، آنگاه $a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+3)}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(2n+3)}.\frac{1}{(n-1)(2n+1)}.\cdots.\frac{1}{(1)(5)}a_0 \\ &= \frac{a_0}{n!.(5).(7)\cdots(3n+3)}, \end{aligned}$$

و جواب اول عبارتست از

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}x^n}{n!.5.7\cdots(2n+3)}.$$

به صورت مشابه با فرض $r = r_1 = -1$ داریم $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{n(2n-3)}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n(2n-3)}.\frac{1}{(n-1)(2n-5)}.\cdots.\frac{1}{(1)(-1)}b_0 \\ &= \frac{-b_0}{n!.(3).(5)\cdots(2n-3)}, \end{aligned}$$

و لذا جواب دیگر معادله داده شده چنین است:

$$y_2 = b_0 \left\{ \frac{1}{x} - 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!.(3).(5)\cdots(2n-3)} \right\}.$$

۱۳.۲.۴. مثال معادله $x^2y'' + x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)y' = \left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)$ را حول $x = 0$ حل کنید.

حل: نقطه $x = 0$ یک نقطه تکین عادی معادله مذکور است. به علاوه

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{-1}{x}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} -\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2} \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{1}{x^2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} : r(r-1) + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0, \quad &\Longrightarrow \quad 2r^2 - r - 1 = 0, \\ &\Longrightarrow \quad r_1 = 1,\ \ r_2 = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

در این مساله نیز $r_1 - r_2 = \dfrac{3}{2}$ صحیح مثبت و یا صفر نیست. پس از نوع الف در ۸-۲-۴ است. در معادله

داده شده تابع $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ را قرار می‌دهیم. در این صورت

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + x\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \Big(x^2+\frac{1}{2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

که ضریب جمله x^{n+r} چنین است:

$$(n+r)(n+r-1)a_n + (n+r-1)a_{n-1} + \frac{1}{2}(n+r)a_n (n \geq 0) - a_{n-2} - \frac{1}{2}a_{n-1} = 0.$$

بنابراین داریم:

$$a_n = \frac{-(2n+2r-3)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(2n+2r-1)(n+r)}.$$

به ازای n هایی که $2 \leq n$. در حالت $n = 1$ داریم:

$$(r^2 + \frac{3}{2}r)a_1 + ra_0 = 0 \implies a_1 = \frac{-2}{2r+3}a_0.$$

حال فرض کنیم $r = r_1 = 1$. در این صورت

$$a_1 = -\frac{2}{5}a_0, \qquad \forall n \geq 2: \quad a_n = \frac{-(2n_1)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(2n+1)(n+1)}.$$

برخی از جملات آن عبارتند از

$$y_1 = a_0 x\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 - \cdots\right).$$

به صورت مشابه، با فرض $r = r_2 = \frac{-1}{2}$ داریم:

$$a_1 = -a_0, \qquad \forall n \geq 2: \; a_n = \frac{-(2n-4)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(2n-2)(n-1/2)}.$$

برخی جملات آن عبارتند از

$$y_2 = \frac{a_0}{\sqrt{x}}\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 - \cdots\right).$$

۱۴.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}: x^2y'' + x(2+3x)y' - 2y = 0$ را در حوالی نقطه $x = 0$ حل کنید.

حل: تنها نقطه تکین معادله $\mathscr{E}$ نقطه $x = 0$ است که آن هم منظم است. به علاوه

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{2+3x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}(2+3x) = 0, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_2(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{-2}{x^2} = -2, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}}\ :\ r(r-1)+2r-2=0, \quad &\Longrightarrow \quad r^2+2r-2=0,\\ &\Longrightarrow \quad r_1=1,\ \ r_2=-2. \end{aligned}$$

پس $r_1-r_2=3$ و حالت ب از قضیه ۸-۲-۴ است. فرض کنیم $y=x^1\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب مساله است. در این صورت

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n-1}+x(2+3x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0.$$

با صفر قرار دادن ضرایب توانهای مختلف x داریم:

$$a_1=-3a_0, \qquad a_2=\frac{-3}{2}a_1, \qquad \text{دلخواه}\ \ a_3, \qquad a_4=-\frac{3}{4}a_3, \qquad \cdots$$

و در حالت کلی

$$n(n-3)a_n+3(n-3)a_{n-1}=0 \ \Longrightarrow\ a_n=-\frac{3}{n}a_{n-1}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-3}{n}a_{n-1}=\frac{-3}{n}\frac{-3}{n-1}a_{n-2}=\cdots\\ &= \frac{-3}{n}.\frac{-3}{n-1}\cdots\frac{-3}{4}a_3=-2\frac{(-3)^{n-2}}{n!}a_3\\ y &= \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}\\ &= a_0(x^{-2}-3x^{-1}+\frac{9}{2})+a_3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-2}3^{n-2}}{n!}x^{n-2}. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-2}-3x^{-1}+\frac{9}{2}=\frac{1}{2x^2}(9x^2-6x+2),\\ y_2 &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-3}3^{n-2}}{n!}x^{n-2}\\ &= -\frac{2}{9x^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n!}\\ &= -\frac{2}{9x^2}(e^{-3x}-1+3x-\frac{9}{6}x^2)\\ &= \frac{-1}{9x^2}(2e^{-3x}-2+6x-3x^2), \end{aligned}$$

جوابهای مستقل خطی $\mathscr{E}$ هستند.

۱۵.۲.۴ . مثال معادله $\mathscr{E}: x^2y'' - x(2-x)y' + (2+x^2)y = 0$ را حول $x=0$ حل کنید.

حل: در این معادله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{x-2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}(x-2) = -2, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to x^2}.\frac{2+x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}(2+x^2) = 2. \end{aligned}$$

پس $r_1 - r_2 = 1$ و حالت ب از قضیه ۸-۲-۴ پیش آمده است. فرض کنیم $y = x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب مساله است. در این صورت

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^n - x(2-x)\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + (2+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

با صفر قرار دادن ضریب توانهای مختلف، داریم:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, \qquad a_2 = \frac{a_0}{3}, \qquad a_3 = \frac{-a_0}{36}, \qquad \cdots \\ a_n &= \frac{-1}{n-2}a_{n-1} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}a_{n-2}. \end{aligned}$$

در نتیجه، یک جواب از $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_1 = x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^5 + \cdots + a_nx^{n+2} + \cdots.$$

جواب مستقل خطی دیگر معادله به شکل:

$$y_2 = cy_1\ln x + x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n,$$

است. به منظور به دست آوردن ضرایب y_2 آنرا در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &2cxy_1' + c(x-2-x^2)y_1 + 10b_0x^{-2} + 2(2b_1-b_0)x^{-1} - b_1 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)b_nx^{n-2} - 2\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)n_nx^{n-2} \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)b_nx^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = 0. \end{aligned}$$

نتیجه اینکه:

$$\begin{aligned} &b_0 = 0, \quad b_1 = \tfrac{1}{3}b_0 = 0, \quad b_2 = \tfrac{1}{3}b_0 = 0, \quad b_3 = -c, \\ &b_4 = \tfrac{c}{3}, \quad \cdots \quad b_n = c(2n-7)a_{n-2} + n_{n-2}. \end{aligned}$$

و یا به اختصار، دومین جواب مستقل خطی $\mathscr{E}$ عبارتست از:

$$y_2 = \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{36}x^5 + \cdots + a_n x^{n+2} + \cdots\right)\ln x - x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots + b_n x^{n-2}.$$

۱۶.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E}\ :\ x^2y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$ را به روش سریها در حوالی نقطه $x = 0$ حل کنید.

حل: در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{x-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}(x-1) = -1, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{1-x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}(1-x) = 1. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}}\ :\ r(r-1) - r + 1 = 0, \implies r^2 - 2r + 1 = 0, \implies r_1 = r_2 = 1.$$

پس حالت ج از قضیه ۸-۲-۴ رخ داده است. فرض کنیم $y = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جوابی از مساله است. بنابراین، بایستی

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n)(n+1)a_n x^{n-1} + x(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} = 0.$$

یا پس از ساده کردن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+2} = 0.$$

پس a_0 دلخواه است، و به ازای هر $n \geq 1$ ای:

$$a_n = -\frac{n-1}{n^2}a_{n-1},$$

و لذا همه a_n های با $n \geq 1$ صفرند. در نتیجه جواب $y = a_0 x$ است. پس $y_1 = x$ یک جواب $\mathscr{E}$ است.
برای به دست آوردن جواب دوم از تغییر تابع $y_2 - uy_1$ یا $y_2 = ux$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$y_2' = u'x + u, \qquad y_2'' = u''x + 2u'.$$

اگر نتیجه را در $\mathscr{E}$ قرار دهیم، داریم:

$$xu'' + (x+1)u' = 0.$$

که یک معادله تفکیک پذیر بر حسب x, u' است:

$$\frac{du'}{u'} = -\frac{x+1}{x}dx, \implies \ln u' = -x - \ln x + \ln A.$$

پس $u' = \frac{A}{x}e^{-x}$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned} u &= \int u'dx = A\int \frac{1}{x}e^{-x}dx = A\int \frac{1}{x}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots\right)dx \\ &= A\left(\ln x - x + \frac{x^2}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{x^2}{n.n!} + \cdots\right) + B, \\ y_2 &= xu = A\left(x\ln x - x^2 + \frac{x^3}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n.n!} + \cdots\right) + Bx. \end{aligned}$$

با فرض $A = 1$ و $B = 0$ داریم:

$$y_2 = x\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n.n!}x^{n+1} = y_1.\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n.n!}x^{n+1}.$$

۱۷.۲.۴. مثال معادله $\mathscr{E} : xy'' + y' + xy = 0$ را به روش سریها در حوالی نقطه $x = 0$ حل کنید.

حل: در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{1}{x} = 1, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.1 = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}} : r(r-1) + r + 0 = 0.$$

بنابراین $r_1 = r_2 = 0$. فرض کنیم $y = x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب مساله است. در این صورت باید داشته باشیم:

$$x.\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} + x.\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0.$$

پس بایستی ضریب توانهای مختلف x صفر باشد:

$$a_1 = 0, \qquad \forall n \geq 2 : a_n = -\frac{1}{n^2}a_{n-2}.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0, \\ a_{2k} &= \frac{-1}{(2k)^2}a_{2(k-1)} \\ &= \frac{1}{(2k)^2}.\frac{1}{(2k-2)^2}.\cdots.\frac{-1}{2^2}a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}.k!^2}.a_0. \end{aligned}$$

پس یک جواب معادله $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}.(k!^2)} x^{2k}.$$

برای به دست آوردن دومین جواب مستقل خطی معادله $\mathscr{E}$، فرض می‌کنیم:

$$y = y_1 . \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

و آن را در $\mathscr{E}$ قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$2y_1' + x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

پس بایستی:

$$b_0 \text{دلخواه}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 \text{دلخواه}, \quad b_3 = 0, \quad \cdots, \quad b_n = -\frac{2}{n}a_n - \frac{1}{n^2}b_{n-2}.$$

بنابراین همه b_n های با اندیس فرد صفرند و بعلاوه

$$b_2 = (-1)^{n+1} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^{2n}.n!} b_0.$$

پس دومین جواب مستقل خطی معاده $\mathscr{E}$ عبارتست از:

$$y_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{128}x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^{2n}.n!}x^{2n} + \cdots.$$

۱۸.۲.۴. تمرینات هر یک از معادلات داده شده را به روش فروبینیوس در حوالی نقطه صفر حل کنید:

1) $x^2y'' - xy' + y = 0,$
2) $x^2y'' + xy' = 0,$
3) $x^2y'' + 3xy' + y = 0,$
4) $4x^2y'' + y = 0,$
5) $4xy'' + 2y' + y = 0,$
6) $2x^2y'' + x(2x+1)y' + 2xy = 0,$
7) $xy'' + (3+2x)y' + 4y = 0,$
8) $(2x^2 - x^2)y'' + (6x^2 - 4x)y' = 2y,$
9) $(x+3x^2)y'' + 2y' = 6xy,$
10) $xy'' + 2y' = xy,$
11) $2x^2y'' + 3xy' = (1+x)y,$
12) $x(1-x)y'' + 3y' = 2y,$
13) $x^2y'' + x^2y' = xy,$
14) $(2x^3 + 6x^2)y'' + (x^2 + 9x)y' = 3y,$
15) $x^2y'' - 2x(x+2)y' + (x+3)y = 0,$
16) $4x(x-1)y'' + 2(1-2x)y' + y = 0,$
17) $xy'' + 2y' + xy = 0,$
18) $x^2y'' - 2xy' + (2+x^2)y = 0,$
19) $4x^2y'' - 4x^2y' + (1+2x)y = 0,$
20) $x^2y'' - 3xy' + 4(x+1)y = 0.$

بخش ۳.۴ توابع بسل

فردریک ویلیام بسل (۱۷۸۴ تا ۱۸۴۶) ریاضیدان آلمانی، در مطالعات خود در خصوص حرکت سماوات به معادلاتی برخورد که امروزه به نام وی شناخته می‌شوند. بعدا این معادلات کاربرهایی در نظریه الکترومغناطیس، انتقال حرکت و آکوستیک پیدا کردند.

۱.۳.۴. تعریف معادله به شکل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

که n عددی صحیح و نامنفی است، معادله بسل با مشخصه n نامیده می‌شود. موضوع حل این معادله در حوالی نقطه $x = 0$ است.

۲.۳.۴. روش حل معادله بسل در این معادله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{1}{x} = 1, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{x^2-n^2}{x^2} = -n^2, \\ C_{\mathscr{E}} &: r(r-1) + r - n^2 = 0, \implies r^2 - n^2 = 0, \implies r = \pm n. \end{aligned}$$

پس $r_1 = n$ و $r_2 = -n$. حال فرض کنیم $y = x\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ جواب مساله است، در این صورت با قرار دادن در معادله بسل داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{(m+r)(m+r-1) + (m+r) - n^2\}a_m x^{m+r} + \sum m = 0 a_m x^{m+r+2} = 0.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (2n+1)a_1 = 0, &\quad\implies\quad a_1 = 0, \\ ((m+r)^2 - n^2)a_m + a_{m-2} = 0, &\quad\implies\quad a_m = \frac{-1}{(m+r)^2 - n^2}a_{m-2}. \end{aligned}$$

و به استقرا نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= a_{2k-1} = \cdots = a_3 = a_1 = 0, \\ a_{2k} &= \frac{-1}{(2k+r)^2 - n^2}.\frac{-1}{(2k-2+r)^2 - n^2}.\cdots.\frac{-1}{(r+2)^2 - n^2}a_0. \end{aligned}$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم: الف) $n = 0$ ب) $n > 0$

الف) اگر $n = 0$، در این صورت $r_1 = r_2 = 0$ و لذا:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-1}{(2k)^2}.\frac{-1}{(2k-2)^2}\cdots\frac{-1}{(2)^2}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{(2^k.k!)^2}a_0. \end{aligned}$$

و بنابراین

$$J_0(x) := \sum^{\infty} k = 0 \frac{(-1)^n}{2^{2k}.(n!)^2} x^{2k}.$$

یک جواب معادله به ازای $n = 0$ است.

ب) فرض کنیم $n > 0$. در این صورت با فرض $r = r_1 = n$ داریم:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-1}{(2k)(2k+2n)} \cdot \frac{-1}{(2k-2)(2k+2n-2)} \cdots \frac{-1}{(2+2n)(2)} a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2.4\cdots(2k)} \cdot \frac{1}{(2k-2)(4+2n)\cdots(2k+2n)} a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}.k!n!(1+n)(2+n)\cdots(k+n)} = \frac{(-1)^k - 2^n.n!}{2^{n+2k}.k!.(n+k)!}. \end{aligned}$$

و بنابراین

$$J_n(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m}.m!(n+m)!} x^{n+2m}.$$

یک جواب معادله بسل با شاخص n است. تابع $J_n(x)$ را n امین تابع بسل می‌نامیم:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{64} - \cdots, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \cdots, \\ &\vdots \\ J_n(x) &= \frac{1}{2^n.n!} x^n - \frac{1}{2^{n+1}.(n+1)!} x^{n+2} + \cdots. \\ &\vdots \end{aligned}$$

۳.۳.۴. قضیه (خواص تابع بسل)

۱) *صفرهای تابع بسل $J_n(x)$ بین صفرهای تابع بسل $J_{n+1}(x)$ ظاهر می‌شود و صفرهای $J_{n+1}(x)$ بین صفرهای $J_n(x)$. به علاوه اگر m امین ریشه $J_n(x)$ را $\lambda_{m,n}$ بنامیم، آنگاه به ازای m های به اندازه کافی بزرگ داریم:*

$$\lambda_{m,n} \sim \left(m + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

۲) مشتق:

$$a)\ J_0(x)' = -J_1(x),$$

$$b)\ J_1(x)' = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x),$$

$$c)\ (x^n J_n)' = x^2 J_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1,$$

$$d)\ (x^{-n} J_n(x))' = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad \forall n \geq 0,$$

۳) رابطه‌های بازگشتی: اگر $n \geq 1$، آنگاه:

$$a)\ J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x),$$
$$b)\ J_{n+1}(x) = -2J'_n(x) + J_{n-1}(x),$$

۴) تعامد توابع بسل: اگر $r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$ صفرهای مثبت و متوالی تابع بسل $J_n(x)$ باشند، در این صورت

$$\int_0^1 xJ_n(r_i x)J_n(r_j x)dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ \frac{1}{2}\{J'_n(r_i)\}^2 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

۴.۳.۴. تعریف توابع بسل با شاخص منفی را نیز می‌توان تعریف نمود:

$$J_{-n}(x) := (-1)^n J_n(x).$$

n امین تابع بسل از نوع دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y_n(x) \quad := \quad & -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + J_n(x)\ln x \\ & -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-01)^k}{k!(n+k)!}\left(H_n + \sum_{t=1}^{n+k}\frac{1}{t}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \end{aligned}$$

که در آن:

$$H_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} & n \geq 1 \text{ اگر} \\ 0 & n = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۵.۳.۴. قضیه به ازای هر $n \geq 0$ ای، جواب عمومی معادله بسل با شاخص n عبارت از:

$$\mathscr{S}\ :\ y = A_n + BY_n,$$

است که A و B اعداد ثابت دلخواهند.

۶.۳.۴. قضیه معادله دیفرانسیل:

$$x^2u'' + (1-2a)xu' + (b^2c^2x^{2c} + a^2 - k^2c^2)u = 0,$$

با تغییر تابع $u = x^a y$ به معادله:

$$x^2u'' + xy' + (b^2x^{2c} - k^2)c^2y = 0,$$

و در ادامه با تغییر متغیر $w = bx^c$ به معادله بسل:

$$w^2\frac{d^2y}{d^2} + \frac{dy}{dw} + (w^2 - k^2)y = 0,$$

تبدیل می‌شود. در نتیجه $u = x^a J_k(bx^c)$ یک جواب آن است.

۷.۳.۴. مثال در معادله $x^2u'' + xu' + (x - \frac{k^2}{4})u = 0$ با فرض، $a = 0$ و $b = 2$ و $c = 1/2$ و با استفاده از ۶-۳-۴ نتیجه می‌گیریم که $u = J_k(2\sqrt{x})$ یک جواب مساله است. به علاوه جواب عمومی آن چنین است:

$$\mathscr{S} : y = AJ_k(2\sqrt{x}) + BY_k(2\sqrt{x}).$$

۸.۳.۴. مثال در معادله $u'' + b_0x^m u = 0$ با فرض $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{m}, c = \frac{m}{2}, k = 0$ و با استفاده از ۶-۳-۴ نتیجه می‌گیریم که

$$u = \sqrt{x}J_{1/(m+2)}\left(\frac{2\sqrt{b_0}}{m+2}\sqrt{x^{m+2}}\right),$$

یک جواب معادله است.

۹.۳.۴. مثال با توجه به ۶-۳-۴ تابع $u = \sqrt{x}J_k(x)$ یک جواب معادله زیر است:

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4k^2}{4x^2}\right)u = 0.$$

۱۰.۳.۴. قضیه *معادله دیفرانسیل:*

$$x^2y'' + x(1 - 2x\tan x)u' = (x\tan x + k^2)u.$$

با تغییر تابع $u = y/\cos x$ به معادله بسل

$$x^2u'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0,$$

تبدیل می‌گردد. بنابراین، جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathscr{S} : u = \frac{1}{\cos x}\big(AJ_k(x) + BY_k(x)\big).$$

۱۱.۳.۴. تعریف اگر در معادله بسل n عدد صحیح نباشد، می‌توان به جواب رسید. این بار، جواب حاصل عبارتست از:

$$J_n(x) := \sum^{\infty} k = 0\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

که قبلا در ۴-۹-۳ معرفی شد. در مثال ۲ از ۷-۳-۴ نیز از J_n که n صحیح نیست. استفاده می‌شود.

۱۲.۳.۴. مثال معادله آیری $y'' + xy = 0$ حالت $b_0 = 1$ و $m = 1$ در مثال ۲ از ۷-۳-۴ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\frac{1}{3}}}{k!\Gamma(k+4/3)}. \end{aligned}$$

یک جواب آن است.

۱۳.۳.۴. قضیه *اگر شاخص معادله بسل صحیح باشد، J_n و Y_n جوابهای مستل خطی آن هستند و اگر شاخص آن صحیح نباشد، توابع J_n و J_{-n} جوابهای مستقل خطی آن خواهند بود.*

۱۴.۳.۴. تمرینات در هر مورد نشان دهید y_1 جواب خصوصی $\mathscr{E}$ است:

1) $\mathscr{E}: xy'' - y + xy = 0, \qquad y_1 = xJ_1(x),$

2) $\mathscr{E}: xy'' + y' + 2y = 0, \qquad y_1 = J_0(2\sqrt{2x}),$

3) $\mathscr{E}: xy'' + 3y' + xy = 0, \qquad y_1 = x^{-1}J_1(x),$

4) $\mathscr{E}: xy'' + y' + x^3y = 0, \qquad y_1 = J_0\left(\frac{x^2}{2}\right),$

۵) جوابی از $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ بیابید که $y(1) = 1$.

۶) نشان دهید $y = uJ_0(u)$ که $u = \sqrt{x}$ در معادله $4x^2y'' + (x+1)y = 0$ صدق می‌کند.

۷) نشان دهید تابع $y = \frac{1}{x}J_1(x)$ درمعادله $xy'' + 3y' + xy = 0$ صدق می‌کند.

۸) با تغییر متغیر $u = \sqrt{x}$ معادله $2x^2y'' + 4y' + (x-1)y = 0$ را به معادله‌ای بسل تبدیل کنید. سپس جوابی را بیابید که $y(4) = 1$.

۹) نشان دهید که معادله $xy'' + (1-2p)y' + xy = 0$ دارای جواب خصوصی $x^pJ_p(x)$ است.

۱۰) نشان دهید که $\int_0^x t.J_0(t)dt = xJ_1(x)$.

۱۱) نشان دهید که $\int_0^x t^{-1}J_2(t)dt = -x^{-1}J_1(x) + \frac{1}{2}$.

هر یک از روابط زیر را نشان دهید:

12) $(x^kJ_k(x))' = x^kJ_{k-1}(x), \qquad$ 13) $(x^{-k}J_k(x))' = -x^{-k}J_{k+1}(x),$

14) $J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x}, \qquad$ 15) $J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J'_k(x).$

بخش ۴.۴ چند جمله‌ایهای لژاندر

۱.۴.۴. تعریف فرض کنید k عددی حقیقی است. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0.$$

را معادله دیفرانسیل لژاندر با شاخص k می‌نامیم. این معادله به م.لژاندر (۱۷۵۲ تا ۱۸۳۳) ریاضیدان فرانسوی منتسب است.

۲.۴.۴. روش حل نقطه $x = 0$ یک نقطه عادی معادله لژاندر است. به علاوه توابع ضریب:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \frac{-2x}{1-x^2} = -2x(1+x^2+x^4+\cdots), \\ a_0(x) &= \frac{k(k-1)}{1-x^2} = k(k-1)(1+x^2+x^4+\cdots). \end{aligned}$$

در بازه $-1 < x < 1$ تحلیلی هستند. بنابراین، می‌توان فرض کرد که معادله دارای یک جواب به شکل سری مک لوران در این بازه است: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. بنابراین:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + k(k-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

و درنتیجه:

$$\begin{aligned}
2a_2 + k(k+1)a_0 = 0, &\quad\Longrightarrow\quad a_2 = \frac{-1}{2}k(k+1)a_0,\\
6a_3 - 2a_1 + k(k+1)a_1 = 0, &\quad\Longrightarrow\quad a_3 = \frac{-1}{6}(6-1)(k+2)a_1,\\
12a_4 - 6a_2 + k(k+1)a_2 = 0, &\quad\Longrightarrow\quad a_4 = \frac{-1}{12}(k-2)(k+3)a_2,\\
&\quad\vdots\\
(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n+1)a_n + k(k+1)a_n = 0, &\quad\Longrightarrow\quad a_{n+2} = \frac{n(n+1)-k(k+1)}{(n+1)(n+2)}.\\
\vdots &\quad\vdots
\end{aligned}$$

در نتیجه، با تکرار این فرمولها، داریم:

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!}k(k+1)(k-2)(k+3)(k-4)(k+5)\cdots(k+2n-1)a_0,\\
a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(k-1)(k+2)(k-3)(k+4)(k-5)(k+6)\cdots(k+2n)a_1.
\end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی لژاندر عبارتست از:

$$\mathscr{S} : y = AS_k(x) + BT_k(x).$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
S_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}\\
&= 1 - \frac{1}{2}k(k+1)x^2 + \frac{1}{24}k(k+1)(k-2)(k+3)x^2 + \cdots\\
T_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}\\
&= x - \frac{1}{6}(k-1)(k+2)x^3 + \frac{1}{120}(k-1)(k+2)(k-3)(k+4)x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

- چنانچه k عدد صحیح مثبت فرد $(1, 3, 5, \cdots)$ و یا عدد صحیح منفی زوج $(-2, -4, \cdots)$ باشد، سری توان $T_k(x)$ مختوم خواهد بود و عملا چند جمله‌ای می‌باشد.
- چنانچه k عدد صحیح مثبت زوج $(2, 4, 6, \cdots)$ و یا عدد صحیح منفی فرد $(-1, -3, -5, \cdots)$ باشد، سری توان $S_k(x)$ مختوم خواهد بود و عملا یک چند جمله‌ای می‌گردد.

- چنانچه k صحیح نباشد، هر دو سری S_k و T_k نامتناهی‌اند. آنها توابعی پیوسته از x بر بازه $(-1,1)$ می‌باشند. در این حالت S_k و T_k را توابع لژاندر با شاخص k می‌نامند.

۳.۴.۴. تعریف در صورتی که k عددی صحیح باشد، معادله لژاندر با شاخص k دارای لااقل یک جواب به شکل چند جمله‌ای است. آن جواب را چند جمله‌ای لژاندر با شاخص k می‌نامیم و با نماد $P_k(x)$ نشان می‌دهیم.

۴.۴.۴. مثال چند جمله‌ای لژاندر با شاخص $4,3,2,1,0$ به ترتیب عبارتند از:

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=x\qquad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\qquad P_4(x)=1-10x^2+\frac{35}{3}x^2.$$

البته در آنها به ترتیب فرض شده است:

$$a_0=\frac{3}{8},\quad a_1=\frac{-3}{2},\quad a_0=\frac{-1}{2},\quad a_1=1,\quad a_0=1.$$

۵.۴.۴. فرمول کلی n امین چند جمله‌ای لژاندر عبارتست از:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!}x^{n-2k}.$$

اقتصاددان فرانسوی، الین رودریگرز (۱۷۹۴ تا ۱۸۵۱) نیز فرمولی مختصر به شرح ذیل برای محاسبه چند جمله‌ایهای لژاندر دارد:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

۶.۴.۴. مثال با استفاده از دو فرمول بالا داریم:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6-2k)!}{k!(3-2k)!(3-k)!}x^{3-2k}\\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{6!}{0!3!3!}x^3-\frac{4!}{1!1!2!}x\right)\\
&= \frac{1}{8}(20x^3-12x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= \frac{1}{2^3.3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3\\
&= \frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^6-3x^4+3x^2-1)\\
&= \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}(6x^5-12x^3+6x)\\
&= \frac{1}{48}(30x^4-36x^2+6)'=\frac{1}{2}(5x^3-3x).
\end{aligned}$$

۷.۴.۴. قضیه *چند جمله‌ایهای لژاندر، خواص به شرح زیر را دارند:*

1) $(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)xP_n(x),$

2) $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x),$

3) $P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x),$

4) $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0; m\neq n,$

5) $\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2dx=\dfrac{2}{2n+1}.$

۸.۴.۴. تمرینات

۱) چند جمله‌ایهای $P_7(x), P_6(x), P_5(x)$ را به دست آورید.

۲) به کمک ۴-۴-۷ نشان دهید:

$$(n+1)\int_{-1}^{1}P_{n+1}^2(x)dx=(2n+1)\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n+1}(x)dx$$

۳) ثابت کنید که اگر $|x|\leq 1$ و $|t|<1$، آنگاه:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+\cdots+P_n(x)t^n+\cdots$$

۴) به کمک (۳) ثابت کنید $P_n(1)=1$.

۵) نشان دهید که اگر $Q(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه کمتر از n باشد، آنگاه:

$$\int_{-1}^{1}Q(x)P_n(x)dx=0.$$

۶) ثابت کنید $P_n^{(n)}(x)=(2n)!/(2^n.n!)$.

۷) نشان دهید که اگر $n\geq 1$ آنگاه $\int_0^1 P_{2n}(x)dx=0$.

۸) ثابت کنید که اگر $0\leq m\leq n$، آنگاه $\int_{-1}^{1}P'_n(x)P_m(x)dx=1-(-1)^{n+m}$.

فصل ۵

دستگاه معادلات دیفرانسیل

بخش ۱.۵ تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱.۵. تعریف منظور از دستگاه معادلات دیفرانسیل، مجموعه‌ای است مرکب از دو یا چند معادله دیفرانسیل. جواب یک دستگاه، جواب مشترک کلیه معادلات آن دستگاه است. جواب عمومی یک دستگاه اشتراک جواب عمومی کلیه معادلات آن دستگاه است. [۱]

۲.۱.۵. مثال دستگاه زیر، دستگاه معادلات دیفرانسیل با متغیر t و مجهولات x و y است:

$$t\frac{dx}{dt} = x - y\sin^2 y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - x\frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = x - y.$$

۳.۱.۵. مثال معادلات $x' = xyz^2 - t^2$، $ty'' = x - yz$ و $z''' = x^2 + y^2$ یک دستگاه با متغیر t و توابع مجهول x، y و z تشکیل می‌دهند.

۴.۱.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y + t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x + y + 1.$$

اگر از معادله اول نسبت به t مشتق بگیریم، خواهیم داشت: $x'' = x' - 2y' + 1$ و به کمک معادلات داده شده داریم:

$$\begin{aligned} x'' &= (x - 2y + t)' \\ &= x' - 2(2x + y + 1) + 1 \\ &= x' - 4x - 2y - 1 \\ &= x' - 4x - (x + t - x') - 1. \end{aligned}$$

[۱] — آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ — تالیف: مهدی نجفی‌خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس m_nadjafikhah@iust.ac.ir در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالا در حال تغییر. لطفا آخرین نسخه آن را تهیه کنید:
http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa5.pdf

در نتیجه $x'' - 2x' + 5x = -t - 1$ یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت بر حسب x و t است. آن را به روش در فصل ۳ حل می‌کنیم:

$$x = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x - \frac{1}{25}(5t+7).$$

اما بنا به صورت مساله $y = (x+t-x')/2$ و بنابراین مساله حل است.

۵.۱.۵. تعریف دستگاه معادلات دیفرانسیل را در صورتی استاندارد گوییم که به صورت زیر نوشته شده باشد:

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} &= f_1\Big(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \cdots, y_2^{(k_1-1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(k_1-1)}\Big), \\ y_2^{(k_2)} &= f_2\Big(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(k_2-1)}, y_2, y_2', \cdots, y_2^{(k_2-1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(k_2-1)}\Big), \\ &\vdots \\ y_n^{(k_n)} &= f_n\Big(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(k_n-1)}, y_2, y_2', \cdots, y_2^{(k_n-1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(k_n-1)}\Big). \end{cases} \tag{۱.۵}$$

عدد $a = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ را مرتبه دستگاه (۱.۵) می‌نامیم.

۶.۱.۵. مثال دستگاه زیر را به شکل استاندارد بنویسید:

$$y_2 y_1' - \ln(y_1'' - y_1) = 0, \qquad e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0.$$

حل: دستگاه از مرتبه سه است، زیرا $k_1 = 2$ و $k_2 = 1$ و لذا $a = 2 + 1 = 3$، معادله اول را بر حسب y'' حل می‌کنیم و معادله دوم را بر حسب y_2'؛ بنابراین:

$$y_1'' = y_1 + e^{y_1' y_2}, \qquad y_2' = \ln(y_1 + y_2).$$

۷.۱.۵. مثال دستگاه معادلات دیفرانسیل داده شده را به شکل استاندارد بنویسید:

$$xy_1^{(3)} = 2y_1 y_3' - y_1' + y_2, \qquad y_2 = y_2' - y_1' - x^2 y_2^{(4)}, \qquad y_3 y_3'' + xy_1 = 1.$$

حل: چون $k_1 = 3$، $k_2 = 4$ و $k_3 = 2$، این دستگاه از مرتبه ۹ است. این دستگاه را به شکل استاندارد می‌توان نوشت:

$$y_1^{(3)} = \frac{2}{x} y_1 y_3' - \frac{1}{x} y_1' + \frac{1}{x} y_2, \qquad y_2^{(4)} = \frac{1}{x^2}(y_2' - y_1' - y_2), \qquad y_3'' = \frac{1}{y_3}(1 - xy_2).$$

۸.۱.۵. تعریف یک دستگاه را در صورتی **به شکل نرمال** گوییم که به صورت

$$\boxed{\begin{cases} y_1' &= f_1\Big(x, y_1, y_2, \cdots, y_n\Big), \\ y_2' &= f_2\Big(x, y_1, y_2, \cdots, y_n\Big), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n\Big(x, y_1, y_2, \cdots, y_n\Big). \end{cases}} \tag{۲.۵}$$

بیان شده باشد. دو دستگاه معادله را در صورتی **معادل** گوییم که جوابشان یکی باشد. هر دستگاه دلخواهی را به یک دستگاه نرمال معادل می‌توان تبدیل نمود.

۹.۱.۵. مثال دستگاه زیر را به شکل نرمال بنویسید:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=y_2, \qquad x^3\frac{dy_2}{dx}-2y_1=0.$$

حل: فرض کنیم $y_3:=\frac{dy_1}{dx}$، در این صورت می‌توان نوشت:

$$\frac{dy_3}{dx}=y_2, \qquad \frac{dy_1}{dx}=y_3, \qquad \frac{dy_2}{dx}=\frac{2}{x^3}y_1,$$

که یک دستگاه نرمال است.

۱۰.۱.۵. مثال معادله دیفرانسیل $\frac{d^2x}{dt^2}+p(x)\frac{dx}{dt}+q(x)=0$ را به شکل یک دستگاه نرمال بنویسید.

حل: کافی است فرض شود $y:=\frac{dx}{dt}$، در این صورت دستگاه معادلات:

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=-p(t)y-q(t).$$

با معادله داده شده معادل است.

۱۱.۱.۵. مثال نشان دهید $x_1=-1/t^2$ و $x_2=-t\ln t$ جواب دستگاه معادلات زیر بربازه باز $0<t<\infty$ هستند:

$$\frac{dx_1}{dt}=2tx_1^2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=\frac{x_2}{t}-1.$$

حل: ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}-2tx_1^2 &= -(-2)t^{-3}-2t\Big(\frac{-1}{t^2}\Big)^2\\
&= 2t^{-3}-2tt^{-4}=0,\\
\frac{dx_2}{dt}-\frac{1}{t}x_2+1 &= \Big(-\ln t-t\frac{1}{t}\Big)-\frac{1}{t}(-t\ln t)+1\\
&= -\ln t-1+\ln t+1=0.
\end{aligned}$$

۱۲.۱.۵. تمرینات در هر مورد نشان دهید که $\mathscr{S}$ یک جواب $\mathscr{E}$ است:

1) $\mathscr{E}:\begin{cases} dx_1/dt=-2t_1^2,\\ dx_2/dt=(x_2+t)/t,\end{cases} \qquad \mathscr{S}:\begin{cases} x_1=1/t^2,\\ x_2=t\ln t,\end{cases}$

2) $\mathscr{E}:\begin{cases} dx_1/dt=e^{t-x_1},\\ dx_2/dt=2e^{x_1},\end{cases} \qquad \mathscr{S}:\begin{cases} x_1=t\\ x_2=2e^t,\end{cases}$

3) $\mathscr{E}:\begin{cases} dx/dt=y,\\ dy/dt=y^2/x,\end{cases} \qquad \mathscr{S}:\begin{cases} x=e^{2t},\\ y=e^t,\end{cases}$

4) $\mathscr{E}:\begin{cases} dy/dx=(z-1)/z,\\ dz/dx=y-x,\end{cases} \qquad \mathscr{S}:\begin{cases} y=x+e^x,\\ y=e^{-x}.\end{cases}$

۱۳.۱.۵. قضیه (قضیه وجود یکتایی) *فرض کنید $\mathscr{E}$ دستگاه نرمال در (۲.۵) است و توابع f_1، f_2، . . . و f_n بر دامنه $n+1$ بعدی D از متغیرهای x، y_1، y_2، . . . و y_n تعریف شوند. اگر یک همسایگی از نقطه $A=\left(x^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_n^0\right)$ در D یافت شود که توابع f_i بر آن پیوسته بوده و مشتقات جزیی آنها نسبت به $y_1,y_2,\cdots,y_n$ کراندار باشد، آنگاه عددی مثبت $\varepsilon>0$ و توابعی مانند φ_1، φ_2، . . . و φ_n بر $(x^0-\varepsilon,x^0+\varepsilon)$ به گونه‌ای یافت می‌شوند که اولا در $\mathscr{E}$ صدق می‌کنند و در ثانی:*

$$\varphi_1'(x^0)=y_1^0,\quad \cdots,\quad \varphi_n^0(x^0)=y_n^0.$$

n تایی $(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ با این ویژگی منحصر بفرد است.

۱۴.۱.۵. مثال دستگاه معادلات داده شده را حل کنید:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1-x_2,\qquad \frac{dx_2}{dt}=x_2-4x_1.$$

حل: از طرفین معادله اول نسبت به t مشتق گرفته و سپس به کمک معادلات دادشده، همه چیز را برحسب x_1 می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\\ &= \frac{dx_1}{dt}-(x_2-4x_1)\\ &= \frac{dx_1}{dt}-\Big(x_1-\frac{dx_1}{dt}\Big)+4x_1.\end{aligned}$$

و در نتیجه به معادلهٔ خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت $\frac{d^2x_1}{dt^2}-2\frac{dx_1}{dt}-3x_1=0s$ می‌رسیم. معادلهٔ مشخصهٔ این معادلهٔ همگن $\lambda^2-2\lambda-3=0$ است که ریشه‌های آن ۱- و ۳ هستند. بنابراین:

$$x_1=Ae^{-t}+Be^{3t}.$$

از طرفی $x_2=x_1-\frac{dx_1}{dt}$، بنابراین

$$\begin{aligned}x_2 &= Ae^{-t}+Be^{3t}+Ae^{-t}-3Be^{3t}\\ &= 2Ae^{-t}-2Be^{3t}.\end{aligned}$$

پس، در مجموع جواب عمومی دستگاه داده شده عبارتست از

$$\mathscr{S}=\Big\{x_1=Ae^{-t}+Be^{3t},\ \ x_2=2Ae^{-t}-2Be^{3t}\ :\ A,B\in\mathbb{R}\Big\}.$$

۱۵.۱.۵. مثال دستگاه معادلات مثال ۱۴.۱.۵ را با فرض $x_1(0)=0$ و $x_2(0)=-4$ حل کنید.

حل: چون $x_1(t)=Ae^{-t}+Be^{3t}$ با فرض $t=0$ داریم $A+b=0$. چون $x_2(t)=2Ae^{-t}-2Be^{3t}$ با فرض $t=0$ داریم $2A-2B=-4$. بنابراین $A=-1$ و $B=1$. پس جواب این مساله عبارتست از

$$x_1(t)=-e^{-t}+e^{3t},\qquad x_2(t)=-2e^{-t}-2e^{3t}.$$

۱۶.۱.۵. مثال دستگاه معادلات $\frac{dx}{dt} = y$ و $\frac{dy}{dt} = -x$ را با شرط $x(0) = x_0$ و $y(0) = y_0$ حل کنید.

حل: با مشتق گیری از معادلهٔ اول و استفاده از معادلهٔ دوم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt} &= \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}) = \frac{d}{dt}y \\ &= \frac{dy}{dt} = -x. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0,$$

که یک معادلهٔ خطی مرتبه دوم با معادله مشخصهٔ $\lambda^2 + 1 = 0$ است. این معادله دارای ریشه‌های $0 \pm 1i$ است و لذا

$$x(t) = A\cos t + B\sin t.$$

اما $y = \frac{dx}{dt}$، بنابراین $y(t) = -A\sin t + B\cos t$. اما مطابق فرض $x(0) = x_0$ و $y(0) = y_0$. بنابراین $A = x_0$ و $B = y_0$ و جواب مساله عبارتست از

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\cos t + y_0\sin t, \\ y(t) &= -x_0\sin t + y_0\cos t. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= x_0^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + y_0^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= x_0^2 + y_0^2. \end{aligned}$$

یعنی نمودار جواب مساله یک دایره به مرکز مبدا $(0,0)$ وشعاع $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ است. اگر $x_0 = y_0 = 0$ آنگاه جواب مساله تک نقطه $(0,0)$ خواهد بود: $x(t) = y(t) = 0$.

۱۷.۱.۵. تعریف تابع $g(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ را در صورتی یک انتگرال برای دستگاه نرمال در (۲.۵) گوییم که در دامنه‌ای D همه مشتقات جزئی $\partial g/\partial x, \partial g/\partial y_1, \cdots, \partial g/\partial y_n$ و خود تابع g پیوسته باشند و اگر جوابی دلخواه از آن دستگاه بر دامنه D را در g قرار دهیم، تابع یک مقدار ثابت به خود بگیرد. یعنی، تابع حاصل عملاً به $y_1, y_2, \cdots, y_n$ بستگی داشته باشد و به t بستگی نداشته باشد. بنابراین هر انتگرال دستگاه نرمال (۲.۵)، تابعی مانند g است که $g(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \equiv c$.

۱۸.۱.۵. مثال تابع با مقدار حقیقی $g(t, x_1, x_2) = \frac{x_2}{t} - x_1$ تعریف شده بر دامنه:

$$D = \left\{(t, x_1, x_2) \,:\, t \neq 0,\ t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

یک انتگرال دستگاه معادلات زیر است:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{x_2}{t}.$$

زیرا جواب عمومی این دستگاه عبارتست از

$$x_1(t) = At, \qquad x_2(t) = At^2 + Bt.$$

ملاحظه می‌گردد که

$$g(t, x_1(t)x_2(t)) = \frac{1}{t}(At^2 + Bt) - (At) = B,$$

که B ثابت است. این تساوی بر D برقرار است.

۱۹.۱.۵. قضیه *شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $g(x, y_1, \cdots, y_n)$ یک انتگرال دستگاه (۲.۵) باشد، این است که رابطه زیر بر D برقرار باشد:*

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\frac{\partial g}{\partial y_k} = 0$$

۲۰.۱.۵. مثال نشان دهید که تابع $g(t, x_1, x_2) = \arctan(x_1/x_2) - t$ انتگرالی برای دستگاه معادلات $dx_1/dt = x_1^2/x_2$ و $dx_2/dt = -x_2^2/x_1$ است.

حل: در این مساله $f_1(t, x_1, x_2) = x_1^2/x_2$ و $f_2(t, x_1, x_2) = -x_2^2/x_1$. بعلاوه ملاحظه می‌گردد که

$$\frac{\partial g}{\partial t} + f_1.\frac{\partial g}{\partial x_1} + f_2.\frac{\partial g}{\partial x_2} = (-1) + \Big(\frac{x_1^2}{x_2}\Big)\Big(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\Big) + \Big(-\frac{x_2^2}{x_1}\Big)\Big(\frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2}\Big),$$

که این رابطه بر دامنه $D = \Big\{(t, x_1, x_2) | x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\Big\}$ برقرار است. پس g یک انتگرال برای دستگاه داده شده است.

۲۱.۱.۵. مثال دو انتگرال برای دستگاه معادلات مثال ۱۴.۱.۵ بیابید.

حل: با توجه به جواب عمومی این دستگاه، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{-t} + Be^{3t} \\ x_2 = 2Ae^{t} - 2Be^{3t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_1 = 4Ae^{-t} \\ x_2 - 2x_1 = -4Be^{3t} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4A = e^{t}(x_2 + 2x_1) \\ -4B = e^{-3t}(x_2 - 2x_1) \end{cases}$$

پس تابع $g_1(t, x_1, x_2) = e^{t}(x_2 + 2x_1)$ و $g_2(t, x_1, x_2) = e^{-3t}(x_2 - 2x_1)$ بر دامنه $D = \mathbb{R}^2$ به ازای هر جواب از دستگاه مذکور، ثابت هستند. بنابراین، g_1 و g_2 انتگرال این دستگاهند.

۲۲.۱.۵. مثال دو انتگرال برای دستگاه معادلات مثال ۱۶.۱.۵ بیابید.

حل: با توجه به جواب عمومی این دستگاه داریم:

$$\begin{cases} x = A\cos t + B\sin t \\ y = B\cos t - A\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\sin t + y\cos t = B \\ x\cos t - y\sin t = A \end{cases}$$

بنابراین توابع $g_1(t, x_1, x_2) = x\sin t + y\cos t$ و $g_2(t, x_1, x_2) = x\cos t - y\sin t$ بر دامنه $D = \mathbb{R}^3$ انتگرال دستگاه مورد نظر هستند.

۲۳.۱.۵. تعریف در صورتی می‌گوییم توابع y_1، y_2، . . . و y_n نسبت به توابع x_1، x_2، . . . و x_n مستقل هستند که هیچ رابطه‌ای چون $F(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$ بین توابع y_1، y_2، . . . و y_n به گونه‌ای برقرار باشد که مستقل از انتخاب x_1، x_2، . . . و x_n برقرار است. شرط لازم و کافی برای این امر آن است که ژاکوبین y_i ها نسبت به x_i ها مخالف فر باشد:

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}:=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

۲۴.۱.۵. قضیه *اگر دستگاه نرمال (۲.۵) دارای n انتگرال مستقل نسبت به y_1، y_2، . . . و y_n باشد، آنگاه جواب عمومی این دستگاه عبارت است از*

$$\mathscr{S}\ :\ g_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=A_1,\quad\cdots,\quad g_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=A_n,$$

که $A_1,\cdots,A_n$ اعداد ثابت دلخواهند.

۲۵.۱.۵. تمرینات در هر مورد نشان دهید که g یک انتگرال دستگاه داده شده است:

$$\begin{array}{llll}
1) & \frac{dx_1}{dt}=\frac{x_1^2}{x_1}, & \frac{dx_2}{dt}=x_2-x_1, & g=x_1x_2e^{-t},\\
2) & \frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}e^{-x}, & \frac{dy}{dt}=\frac{x}{t}e^{-y}, & g=(1+x)^{-x}-e^{-y},\\
3) & \frac{dx}{dt}=\frac{y+t}{x+y}, & \frac{dy}{dt}=\frac{x-t}{x+y}, & g=x+y-t \text{ یا } g=x+y+t.
\end{array}$$

بخش ۲.۵ تبدیل دستگاه به یک معادله و حل آن

فرض کنید یک دستگاه نرمال مانند:

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt} = f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \quad\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{cases}\tag{۳.۵}$$

در اختیار است. در این صورت می‌توان (۳.۵) را بر حسب x_1، x_2، . . . و x_n حل نمود و آنها را بر حسب $\frac{dx_1}{dt}$، $\frac{dx_2}{dt}$، . . . و $\frac{dx_n}{dt}$ بیان نمود:

$$x_k=h_k\left(t,\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \cdots,\ \frac{dx_n}{dt}\right).$$

اکنون می‌توان از اولین معادله (۳.۵) نسبت به t مشتق گرفت:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}.\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}.\frac{dx_n}{dt}. \qquad (۴.۵)$$

سپس به جای $\frac{dx_1}{dt}$، $\frac{dx_2}{dt}$، . . . و $\frac{dx_n}{dt}$ از دستگاه (۳.۵) قرار می‌دهیم و به جای x_1، x_2، . . . و x_n از (۴.۵) قرار می‌دهیم. این کار را طوری انجام می‌دهیم که دیگر در معادله حاصل x_n ای وجود نداشته باشد. با تکرار این عملایت، به ترتیب x_1، x_2، . . . و x_{n-1} را حذف می‌کنیم. در هر مرحله یک مرتبه معادله بالا می‌رود و دست آخر یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام بر حسب x_1 و t حاصل می‌گردد. با حل این معادله و بازگشت به عقب، همه توابع x_1، x_2، . . . و x_n حاصل خواهند شد.

۱.۲.۵. مثال دستگاه معادلات $\frac{dx}{dt} = y+1$ و $\frac{dy}{dt} = x+1$ را حل کنید.

حل: از طرفین معادله $x' = y+1$ نسبت به t مشتق می‌گیریم و سپس از $y' = x+1$ استفاده می‌کنیم:

$$x'' = (x')' = (y+1)' = y' = x+1, \implies x'' - x = 1,$$

که یک معادله خطی با ضرایب ثابت و از مرتبه دوم است. معادله مشخصه آن $\lambda^2 - 1 = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن آن $x_h = Ae^{-t} + Be^t$ است. بعلاوه، $x_p = 1$ یک جواب معادله مذکور است. پس $x = x_p + x_h = 1 + Ae^{-t} + Be^t$ جواب عمومی آن است. اما $y = x' - 1$ بنابراین $y = -Ae^{-t} + Be^t$ و جواب عمومی دستگاه مذکور عبارتست از

$$\mathscr{S} : x = 1 + Ae^{-t} + Be^t, \quad y = -Ae^{-t} + Be^t.$$

۲.۲.۵. مثال دستگاه معادلات $\frac{dx}{dt} = 3x + 8y$ و $\frac{dy}{dt} = -x - 3y$ را حل کنید.

حل: از طرفین معادله اول نسبت به t مشتق گرفته و از معادله دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) = \frac{d}{dt}(3x+8y) \\
&= 3\frac{dx}{dt} + 8\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt} + 8(-x-3y), \\
&= 3\frac{dx}{dt} - 8x - 24y \\
&= 3\frac{dx}{dt} - 8x - 3\Big(\frac{dx}{dt} - 3x\Big) = x,
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0.$$

بنابراین $x(t) = Ae^{-t} + Be^t$. از طرفی:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{8}\Big(\frac{dx}{dt} - 3x\Big) \\
&= \frac{1}{8}(-A^{-t} - Be^t - 3Ae^{-t} - 3Be^t) \\
&= -\frac{1}{2}Ae^{-t} - \frac{1}{4}Be^t.
\end{aligned}$$

پس، جواب عمومی دستگاه داده شده عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ x(t)=2C_1e^{-t}+4C_2e^{t},\quad y(t)=-C_1e^{-t}-C_2e^{t}.$$

که C_1 و C_2 اعداد ثابت دلخواهند.

۳.۲.۵. مثال دستگاه معادلات $t\dfrac{dx}{dt}=-x+yt$ و $t^2\dfrac{dy}{dt}=-2x+yt$ را حل کنید.

حل: بنا به معادله اول $y=\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{x}{t}$. با مشتق گیری از طرفین آن داریم:

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{t^2}+\frac{1}{t}.\frac{dx}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}.$$

اکنون y و dy/dt را در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$t^2\left(-\frac{x}{t^2}+\frac{1}{t}.\frac{dx}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-2x+\left(\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t}\right)t\quad\Longrightarrow\quad t^2\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

پس با فرض $t\neq 0$ داریم $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$. بنابراین $x(t)=At+B$ و

$$y=\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t}=A+\frac{1}{t}(At+B)=2A+\frac{B}{t}.$$

و جواب عمومی دستگاه عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ x=At+B,\quad y=2A+\frac{B}{t},\quad t\neq 0.$$

۴.۲.۵. تمرینات هر یک از دستگاه‌های داده شده را حل کنید:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \frac{dx}{dt}=-9,\quad \frac{dy}{dt}=x,\\
&2)\ \frac{dx}{dt}=y+t,\quad \frac{dy}{dt}=x-t,\\
&3)\ \frac{dx}{dt}=-3x-4y,\quad \frac{dy}{dt}=-2x-5y,\quad x(0)=1,\quad y(0)=4,\\
&4)\ \frac{dx}{dt}=x+5y,\quad \frac{dy}{dt}=-x-3y,\quad x(0)=-2,\quad y(0)=1,\\
&5)\ 4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\sin t,\quad \frac{dx}{dt}+y=\cos t,\\
&6)\ \frac{dx}{dt}+y=z,\quad \frac{d}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dt}+x=z,\\
&7)\ \frac{dx}{dt}=y+z,\quad \frac{dy}{dt}=x+z,\quad \frac{dz}{dt}=x+y,\\
&8)\ \frac{d^2x}{dt^2}=y,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=x,\\
&9)\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+x=0,\quad \frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}=0,\\
&10)\ \frac{d^2x}{dt^2}=3x+y,\quad \frac{dy}{dt}=-2x,\\
&11)\ \frac{d^2x}{dt^2}=x^2+y,\quad \frac{dy}{dt}=-2x\frac{dx}{dt}+x,\quad x(0)=x'(0)=1,\quad y(0)=0.
\end{aligned}
$$

بخش ۳.۵ روش ترکیبات انتگرال پذیر در حل دستگاه معادلات

۱.۳.۵. معرفی روش ترکیبات انتگرال پذیر فرض کنید دستگاه نرمال (۲.۵) را بخواهیم حل کنیم. با استفاده از اعمال معمولی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بر توابع سمت راست (۲.۵) به ترکیباتی به نام ترکیبات انتگرال پذیری می‌رسیم. یعنی، عباراتی به شکل $F(t,u,du/dt)=0$ که u تابعی از x_1، x_2، . . . و x_n است که به شکل مقتضی ساخته شده است. با حل این معادله دیفرانسیل، به یک انتگرال برای دستگاه (۲.۵) می‌رسیم. با ادامه این کار و به دست آوردن n انتگرال مستقل نسبت به x_1، x_2، . . . و x_n معادلات (۲.۵) حل می‌شوند. به مثالهای زیر توجه شود.

۲.۳.۵. مثال دستگاه معادلات $\frac{dx_1}{dt}=2t(x_1^2+x_2^2)$ و $\frac{dx_2}{dt}=4tx_1x_2$ را حل کنید.

حل: با جمع کردن دو معادله داده شده داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{d(x_1+x_2)}{dt} &= \frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt}\\
&= 2t(x_1^2+x_2^2)+4tx_1x_2\\
&= 2t(x_1+x_2)^2.
\end{aligned}
$$

پس با فرض $u = x_1 + x_2$ داریم $\frac{du}{dt} = 2tu^2$ که یک ترکیب انتگرال پذیر برای دستگاه داده شده است. از حل این معادله تفکیک پذیر، داریم $\frac{1}{u} + t^2 = A$، که A عددی ثابت است. پس $g_1 = \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2$ یک انتگرال دستگاه داده شده است. به صورت مشابه با کم کردن معادله دوم از معادله اول، به معادله دیفرانسیل:

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 2t(x_1 - x_2)^2.$$

می‌رسیم که یک ترکیب انتگرال پذیر است. پس با فرض $u = x_1 - x_2$ به $\frac{1}{u} + t^2 = B$ می‌رسیم و بنابراین تابع $g_2 = \frac{1}{x_1 - x_2} + t^2$ نیز یک انتگرال برای دستگاه داده شده است. بنابراین، جواب عمومی دستگاه مورد نظر عبارتست از

$$\mathscr{S} : \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = A, \quad \frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = B.$$

زیرا دو انتگرال نسبت به x_2 و x_1 مستقل هستند:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{-1}{(x_1 + x_2)^2} & \frac{-1}{(x_1 + x_2)^2} \\ \frac{-1}{(x_1 - x_2)^2} & \frac{-1}{(x_1 - x_2)^2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{-2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \neq 0.
\end{aligned}$$

البته بر دامنه $D = \left\{(t, x_1, x_2) | x_1 \neq \pm x_2\right\}$، جواب دستگاه را بر حسب x_1 و x_2 نیز می‌توان بیان نمود. برای این منظور کافی است $g_1 = A$ و $g_2 = B$ را بر حسب x_1 و x_2 حل کنیم:

$$\mathscr{S} : x_1(t) = \frac{A + B - 2t^2}{2(A - t^2)(B - t^2)}, \quad x_2(t) = \frac{B - A}{2(A - t^2)(B - t^2)}.$$

۳.۳.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} : \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + t.$$

حل: با کم کردن معادله دوم از اول، نتیجه می‌گیریم $d(x_1 - x_2)/dt = 0$. پس با فرض $u = x_1 - x_2$ به ترکیب انتگرال پذیر $\frac{du}{dt} = 0$ می‌رسیم. بنابراین $x_1 - x_2 = A$. با قرار دادن $x_1 = A - x_2$ در دومین و سومین معادله $\mathscr{E}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\mathscr{E}' : \frac{dx_2}{dt} = \frac{A}{x_3 - t}, \quad \frac{dx_3}{dt} = A + 1.$$

از دومین معادله در $\mathscr{E}'$ نتیجه می‌گیریم $x_2(t) = (A+1)t + B$ و اگر آن را در معادله اول در $\mathscr{E}'$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{A}{At+B}.$$

پس برای اتمام کار، کافی است انتگرال بگیریم:

$$x_2(t) = \ln|At+B| + C.$$

و بنابراین، جواب عمومی دستگاه $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} \; : \; x_1 = x_2 + A, \quad x_2 = \ln|At + B + C, \quad x_3 = (A+1)t + B.$$

۴.۳.۵. مثال مساله کوشی زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y}, & x(0) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x-t}, & y(0) = 1. \end{cases}$$

حل: این دستگاه را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} y\Big(\dfrac{dx}{dt} - 1\Big) = -1, \\ (x-1)\dfrac{dy}{dt} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\dfrac{d(x-t)}{dt} = -1, \\ (x-t)\dfrac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

با جمع کردن این دو معادله، داریم $y\dfrac{d(x-t)}{dt} + (x-t)\dfrac{dy}{dt} = 0$ یا $\dfrac{d}{dt}((x-t)y) = 0$. بنابراین با فرض $u = (x-t)y$ به ترکیب انتگرال پذیر $\dfrac{du}{dt} = 0$ می‌رسیم. پس $(x-t)y = A$ یک انتگرال دستگاه $\mathscr{E}$ است. بنابراین $x - t = \dfrac{A}{y}$ که اگر در معادله دوم از $\mathscr{E}$ قرار بدهیم، خواهیم داشت $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{A}$. در نتیجه $y = B\exp\Big(\dfrac{t}{A}\Big)$ و در مجموع داریم:

$$x = t + \frac{A}{B}e^{-t/A}, \quad y = Be^{t/A}.$$

اما مطابق صورت مساله $x(0) = 1$، پس $\dfrac{A}{B} = 1$ یا $A = B$ از طرفی $y(0) = 1$ پس $B = 1$ و بنابراین $A = 1$ جواب $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S} \; : \; x = t + e^{-t}, \quad y = e^{t}.$$

۵.۳.۵. تمرینات هر یک از دستگاههای داده شده را حل کنید:

$$1)\ \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2xy, \qquad 2)\ \frac{dx}{dt} = \frac{x}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{x},$$

$$3)\ \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}, \qquad 4)\ \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y},$$

$$5)\ \frac{dx}{dt} = \sin x \cos x, \quad \frac{dy}{dt} = \cos x \sin x, \qquad 6)\ \frac{dx}{dt} = e^{-t}.\frac{1}{y}., \quad e^t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x},$$

$$7)\ \frac{dx}{dt} = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y, \ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\sin 2x \sin 2y, \quad x(0) = y(0) = 0.$$

۶.۳.۵. شکل متقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل دستگاه نرمال (۲.۵) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\boxed{\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{dt}{1}.} \quad (۵.۵)$$

این دستگاه معادلات با دستگاه قبلی (یعنی (۲.۵)) معادل است. به کمک شکل متقارن دستگاه، می‌توان در اغلب موارد ترکیبات انتگرال پذیر را تولید کرد. دلیل این کار در رابطه زیر نهفته است:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n},$$

که $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ اعداد و یا توابع دلخواهند.

۷.۳.۵. مثال دستگاه معادلات $\frac{dx}{dt} = -\frac{\ln t}{2x}$ و $\frac{dy}{dt} = \frac{\ln t}{2x} - 1$ را حل کنید.

حل: این دستگاه را به شکل متقارن می‌نویسیم:

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x}.$$

اولین ترکیب انتگرال پذیر دستگاه داده شده:

$$\frac{dt}{2x} = -\frac{dx}{\ln t} \implies \ln t\, dt + 2x\, dx = 0,$$

یا $d(t\ln t - t + x^2) = 0$ است. پس $t(\ln t - 1) + x^2 = A$ انتگرال دستگاه است. برای به دست آوردن دومین انتگرال برای دستگاه، از ۶.۳.۵ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x} = \frac{dt + dx + dy}{0}, \implies d(t + x + y) = 0,$$

پس $t + x + y = B$ یک انتگرال برای دستگاه است. بنابراین، جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل داده شده عبارتست از

$$\mathscr{S} : t(\ln t - 1) + x^2 = A, \quad x + y + t = B.$$

۸.۳.۵. مثال دستگاه معادلات $\dfrac{dy}{3x-4t}=\dfrac{dx}{5t-3y}=\dfrac{dt}{4y-5x}$: $\mathscr{E}$ را حل کنید.

حل: به کمک ۶.۳.۵ به روش زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{3}.\frac{dt}{4y-5x} &= \frac{4}{4}.\frac{dx}{5t-3y}=\frac{5}{5}.\frac{dy}{3x-4t}=\frac{3dt+4dx+5dy}{0},\\
\frac{2t}{2t}.\frac{dt}{4y-5x} &= \frac{2x}{2x}.\frac{dx}{5t-3y}=\frac{2y}{2y}.\frac{dy}{3x-4t}=\frac{2t\,dt+2x\,dx+2y\,dy}{0}.
\end{aligned}$$

بنابراین $d(3t+2x+5y)=0$ و $d(t^2+x^2+y^2)=0$ و لذا

$$t^2+x^2+y^2=B,\quad 3t+4x+5y=A.$$

انتگرال‌های دستگاه مورد نظرند و جواب عمومی دستگاه عبارتست از

$$\mathscr{S}\ :\ 3t+4x+5y=A,\quad t^2+x^2+y^2=B.$$

۹.۳.۵. تمرینات هر یک از دستگاههای معادلات دیفرانسیل داده شده را حل کنید:

1) $\dfrac{dt}{t}=\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$,

2) $\dfrac{dt}{xy}=\dfrac{dx}{yt}=\dfrac{dy}{xt}$,

3) $\dfrac{dx}{y}=-\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dp}{p}=-\dfrac{dq}{p}$,

4) $\dfrac{dx}{xt}=-\dfrac{dy}{yt}=\dfrac{dt}{xy}$,

5) $\dfrac{dt}{t^2-x^2-y^2}=\dfrac{dx}{2tx}=\dfrac{dy}{2ty}$,

6) $\dfrac{t\,dt}{x^2-2xy-x^2}=\dfrac{dx}{x+y}=\dfrac{dy}{x-y}$,

7) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3t-4y}{2y-3x},\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{4x-2t}{2y-3x}$.

بخش ۴.۵ دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت

نظریه عمومی چنین دستگاه‌هایی تا حدودی پیچیده است و لذا تنها حالت دستگاه با دو مجهول را بررسی می‌کنیم. روشن است که نظریه کلی را به صورت مشابه می‌توان گسترش داد.

۱.۴.۵. تعریف منظور از یک دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت مرتبه دوم، دستگاهی مانند:

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+f_1(t),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+f_2(t).\end{cases}}\tag{۶.۵}$$

است که $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ اعداد ثابتند و f_1 و f_2 توابعی از متغیر t هستند. دستگاه (۶.۵) را در صورتی همگن گوییم که $f_1(t)=f_2(t)=0$. با فرض:

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\quad \vec{F}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}.$$

دستگاه (۶.۵) را به شکل $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{F}$ می‌توان نوشت. بردار

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix},$$

را در صورتی یک جواب خصوصی (۶.۵) بر بازه $(a;b)$ گوییم که به ازای هر $t \in (a;b)$ ای $\vec{Y}' = A\vec{Y} + \vec{F}$.
اگر دستگاه (۶.۵) همگن باشد و $\vec{Y}$ و $\vec{Z}$ توابع باشند که جواب خصوصی آن هستند، آنگاه در صورتی می‌گوییم $\vec{Y}$ و $\vec{Z}$ بر بازه $(a;b)$ یک دستگاه بنیادی از جوابها را تشکیل می‌دهند که رونسکی آنها بر $(a;b)$ مخالف صفر باشد:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & z_1(t) \\ y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix} = y_1 z_2 - y_2 z_1 \neq 0, \qquad \forall t \in (a;b)$$

۲.۴.۵. قضیه *اگر $\vec{Y}$ و $\vec{Z}$ یک دستگاه بنیادی از جوابهای معادله همگن نظیر به (۶.۵) باشند و $\vec{U}$ یک جواب خصوصی آن باشد، آنگاه جواب عمومی (۶.۵) عبارتست از $\boxed{\vec{X} = \vec{U} + A\vec{Z} + B\vec{Y}}$ که B و A اعداد ثابت دلخواهند.*

۳.۴.۵. روش اولر برای حل دستگاه همگن در این روش برای حل دستگاه $\vec{X}' = A\vec{X}$ ابتدا معادله مشخصه A را تشکیل داده و مقادیر ویژه آن را می‌یابیم:

$$\boxed{C_{\mathscr{E}} : \det(\lambda I - A) = 0.} \tag{۷.۵}$$

بسته به اینکه ریشه‌های $C_{\mathscr{E}}$ حقیقی متمایز، حقیقی تکراری و یا مختلط باشند، جواب دستگاه $\vec{X}' = A\vec{X}$ را به روش ذیل می‌توان یافت:

الف) اگر $C_{\mathscr{E}}$ دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 داشته باشد، در این صورت بردارهای $\vec{X}_1$ و $\vec{X}_2$ را طوری می‌یابیم که $A\vec{X}_1 = \lambda_1\vec{X}_1$ و $A\vec{X}_2 = \lambda_2\vec{X}_2$. اکنون، جواب عمومی دستگاه $\vec{X}' = A\vec{X}$ عبارت است از $A_1\vec{X}_1e^{\lambda_1 t} + A_2\vec{X}_2e^{\lambda_2 t}$ که A_1 و A_2 اعداد ثابت دلخواهند.

ب) اگر $C_{\mathscr{E}}$ یک ریشه حقیقی تکراری $\lambda_1 = \lambda_2$ داشته باشد، در این صورت دو دسته متفاوت از بردارهای $\vec{X}_1^{(i)}$ و $\vec{X}_2^{(i)}$ را طوری می‌یابیم که $A\vec{X}_2^{(i)} = \lambda_2\vec{X}_2^{(i)}$ و $A_1\vec{X}_1^{(i)} = \vec{X}_2^{(i)} + \lambda_1\vec{X}_1^{(i)}$. اکنون جواب عمومی دستگاه $\vec{X}' = A\vec{X}$ عبارتست از $\left\{A_1\vec{U}_1 + A_2\vec{U}_2\right\}e^{\lambda_2 t}$ که A_1 و A_2 اعداد ثابت دلخواهند و $\vec{U}_i = \vec{X}_1^{(i)} + t\vec{X}_2^{(i)}$.

ج) اگر $C_{\mathscr{E}}$ دارای ریشه‌های مختلط مزدوج $\alpha \pm \beta i$ باشد، در این صورت بردارهای $\vec{X}_1^{(i)} \pm i\vec{X}_2^{(i)}$ را طوری می‌یابیم که $A(\vec{X}_1^{(i)} + i\vec{X}_2^{(i)}) = (\alpha \pm \beta i)(\vec{X}_1^{(i)} + i\vec{X}_2^{(i)})$ و $\vec{X}_1^{(i)}$ و $\vec{X}_2^{(i)}$ با درایه‌های حقیقی هستند. اکنون جواب عمومی دستگاه $\vec{X}' = A\vec{X}$ عبارتست از $V_1 + V_2$ که در اینجا $V = V_1 + iV_2$ و $V = AU_1 + BU_2$؛ که $\vec{U}_i = \vec{X}_1^{(i)} + i\vec{X}_2^{(i)}$ و A, B اعداد دلخواهند.

۴.۴.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} : \frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + y.$$

حل: این دستگاه را به شکل $\vec{X}' = A\vec{X}$ می‌نویسیم که

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

در این صورت معادله مشخصه دستگاه عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}} : \det(\lambda I_2 - A) = 0 : \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 : \lambda^3 - 2\lambda = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0, 2.$$

پس حالت الف از ۳.۴.۵ رخ داده است: $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 2$.اگر فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $A\vec{X}_1 = \lambda_1 \vec{X}_1$
دراین صورت، بایستی:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta;$$

بنابراین، می‌توان فرض نمود که

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

چون β دلخواه بود، فرض کردیم $\beta = 1$. به صورت مشابه با فرض $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $AX_2 = \lambda_2 X_2$، داریم:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 2\alpha, \\ -\alpha + \beta = 2\beta, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\beta;$$

بنابراین، می‌توان فرض نمود که

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

چون β دلخواه بود، فرض کردیم $\beta = -1$. پس بنا به ۳.۴.۵ جواب عمومی دستگاه $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= Ae^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{S} \;:\; x = A + Be^{2t}, \qquad y = A - Be^{2t}.$$

۵.۴.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} : \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y.$$

حل: این دستگاه را به صورت $\vec{X}' = \vec{X}$ می‌توان نوشت، که در آن $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. در این صورت، معادله مشخصه دستگاه $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0, \\ &: \quad (\lambda-2)(\lambda-1)-6=0, \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1=-1, \lambda_2=4. \end{aligned}$$

فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix}$ بردارهایی هستند که $A\vec{X}_1 = \lambda_1\vec{X}_1$ و $A\vec{X}_2 = \lambda_2\vec{X}_2$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha+3\beta=-\alpha, \\ 2\alpha+\beta=-\beta, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha=-\beta;$$

بنابراین، می‌توان فرض نمود که

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

به صورت مشابه

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\gamma+3\theta=4\gamma, \\ 2\gamma+\theta=4\theta, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta=\frac{2}{3}\gamma;$$

بنابراین، می‌توان فرض نمود که

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

توجه شود که θ و γ دلخواهند. پس، بنا به ۳.۴.۵ جواب عمومی دستگاه $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\mathscr{S}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Be^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

بعبارت دیگر

$$\mathscr{S} \quad : \quad x = Ae^{-t}+3Be^{4t}, \quad y=-Ae^{-t}+2Be^{4t}.$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند.

۶.۴.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}: \frac{dx}{dt} = x-y, \quad \frac{dy}{dt} = x+3y.$$

حل: با فرض $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، این دستگاه را به صورت $X' = AX$ می‌توان نوشت. معادله مشخصه این دستگاه عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0, \\ &: \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 2. \end{aligned}$$

پس حالت ب از ۳.۴.۵ رخ داده است. فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix}$ بردارهایی هستند که $A\vec{X}_2 = \lambda_1 \vec{X}_2$ و $A\vec{X}_1 = \vec{X}_2 + \lambda_1 \vec{X}_1$. در این صورت:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma - \theta = 2\gamma, \\ \gamma + 3\theta = 2\theta, \\ \alpha - \beta = \gamma + \alpha, \\ \alpha + 3\beta = \theta + 2\beta, \end{cases} \implies \begin{cases} \theta = -\gamma, \\ \alpha + \beta = \theta. \end{cases}$$

چون γ و β دلخواهند، می‌توانیم فرض کنیم $\gamma = 1$ و $\beta = 0$. در این صورت:

$$\vec{X}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \implies \quad \vec{U}_1 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

به صورت مشابه، با فرض $\gamma = 0$ و $\beta = 1$ داریم:

$$\vec{X}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \implies \quad \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

و لذا جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (A\vec{U}_1 + B\vec{U}_2)e^{2t} \\ &= \left\{A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + Bt\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}e^{2t} \end{aligned}$$

بعبارت دیگر

$$\mathscr{S} \ : \ x(t) = (-(A+B) + Bt)e^{2t}, \quad y(t) = (A - Bt)e^{2t}.$$

۷.۴.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} : \frac{dx}{dt} = 2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = 4y - x.$$

حل: با فرض $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ این دستگاه را به صورت $X' = AX$ می‌توان نوشت. معادله مشخصه $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} : &\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \\ &: \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 3. \end{aligned}$$

یعنی حالت ب از ۳.۴.۵ است. فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix}$ بردارهایی هستند که $AX_2 = 3X_2$ و $AX_1 = X_2 + 3x_1$. بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 2\gamma + \theta = 3\gamma, \\ 4\gamma - \theta = 3\theta, \\ 2\alpha + \beta = \gamma + 3\alpha, \\ 4\alpha - \beta = \theta + 3\beta, \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \theta = \gamma, \\ \beta = \gamma + \alpha. \end{array} \right.$$

چون γ و α دلخواهند، با فرض $\gamma = 1$ و $\alpha = 0$ داریم:

$$\vec{X}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \implies \vec{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

همچنین، با فرض $\gamma = 0$ و $\alpha = 1$ داریم:

$$\vec{X}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \implies \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

پس بنا به ۳.۴.۵ جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left\{A\vec{U}_1 + B\vec{U}_2\right\}e^{3t} \\ &= \left\{A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + Bt\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}e^{3t}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{S} \ : \ x(t) = (A + Bt)e^{3t}, \quad y(t) = (A + B + Bt)e^{3t}.$$

۸.۴.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} : \frac{dx}{dt} = x - 5y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y.$$

حل: با فرض $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$، دستگاه را به شکل $\vec{X}' = A\vec{X}$ می‌توان نوشت. معادله مشخصه این دستگاه عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \ \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0, \\ &: \ \lambda^2 + 9 = 0, \implies \lambda = 0 \pm 3i. \end{aligned}$$

پس حالت ج از ۳.۴.۵ رخ داده است: $\alpha = 0$ و $\beta = 3$. حال فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ و $A(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2) = (0 + 3i)(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2)$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a + ci \\ b + di \end{pmatrix} = 3i\begin{pmatrix} a + ci \\ b + di \end{pmatrix}, \implies \left\{ \begin{array}{l} (a - 5b) + (c - 5d)i = -3c + 3ai, \\ (2a - b) + (2c - d)i = -3d + 3bi, \end{array} \right.$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{ll} a - 5b = -3c, & c - 5d = 3a, \\ 2a - b = -3d, & 2c - d = 3b, \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} a = 5b - 3c, \\ d = 2c - 3b. \end{array} \right.$$

که b,c دلخواهند. با فرض $b=0$ و $c=1$ داریم $a=-3$، $d=2$ و

$$\vec{X}_1^{(1)}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix},\qquad X_2^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= e^{0t}(\cos 3t+i\sin 3t)(\vec{X}_1^{(1)}+i\vec{X}_2^{(1)}),\\ &= (\cos 3t+i\sin 3t)\begin{pmatrix}-3+i\\2i\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3\cos 3t-\sin 3t+(\cos 3t-3\sin 3t)i\\-2\sin 3t+2\cos 3ti\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

به صورت مشابه با فرض $b=1$ و $c=0$ داریم $a=5$ و $d=-3$ و

$$\vec{X}_1^{(2)}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix},\quad \vec{X}_2^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\vec{U}_2 &= e^{0t}(\cos 3t+i\sin 3t)(\vec{X}_1^{(2)}+i\vec{X}_2^{(2)}),\\ &= (\cos 3t+i\sin 3t)\begin{pmatrix}5\\1-3i\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5\cos 3t+5i\sin 3t\\\cos 3t+3\sin 3t+(\sin 3t-3\cos 3t)i\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ که

$$\begin{aligned}\vec{V} &= A\vec{U}_1+B\vec{U}_2=\vec{V}_1+i\vec{V}_2,\\ \vec{V}_1 &= A\begin{pmatrix}-3\cos 3t-3\sin 3t\\-2\sin 3t\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}5\cos 3t\\\cos 3t+3\sin 3t\end{pmatrix},\\ \vec{V}_2 &= A\begin{pmatrix}\cos 3t-3\sin 3t\\2\cos 3t\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}5\sin 3t\\\sin 3t-3\cos 3t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{V}_1+\vec{V}_2,\\ &: \begin{cases}x(t)=(-2A+5B)\cos 3t+(-6A+5B)\sin 3t,\\ y(t)=(-2A+4B)\sin 3t+(2A-2B)\cos 3t.\end{cases}\end{aligned}$$

۹.۴.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}:\frac{dx}{dt}=3x-3y,\qquad \frac{dy}{dt}=3x-y.$$

حل: با فرض $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ این دستگاه را به شکل $X' = X$ می‌توان نوشت. معادله مشخصه این دستگاه:

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \\ &: \quad \lambda^2 - 2\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = 1 \pm \sqrt{5}i, \end{aligned}$$

است. پس حالت ج ۳.۴.۵ رخ داده است. حال فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ و $A(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2) = (1+\sqrt{5}i)(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2)$. در این صورت:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+ci \\ b+di \end{pmatrix} = (1+\sqrt{5}i)\begin{pmatrix} +ci \\ b+di \end{pmatrix}, \\ &\implies \begin{cases} 3(a+ci) - 3(b+di) = (1+\sqrt{5}i)(a+ci), \\ 3(a+ci) - (b+di) = (1+\sqrt{5}i)(b+di), \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 3 - 3b = a - \sqrt{5}c, 3 - b = b - \sqrt{5}d, \\ 3c - 3d = \sqrt{5} + c, 3c - d = d + \sqrt{5}b, \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} a = (3b - c\sqrt{5})/2, \\ d = (3c - b\sqrt{5})/2. \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به دلخواه بودن b,c فرض می‌کنیم $b = 0$ و $c = 2$. در این صورت $a = -\sqrt{5}$ و $d = 3$ و:

$$\vec{X}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= (e^t \cos\sqrt{5}t + ie^t \sin\sqrt{5}t)\left\{\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}, \\ &= e^t\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\cos\sqrt{5}t - 2\sin\sqrt{5}t \\ -3\sin\sqrt{5}t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t + 2\cos\sqrt{5}t \\ \cos\sqrt{5}t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

مرحله بعد، فرض می‌کنیم $b = 2$ و $c = 0$. در این صورت $a = 3$ و $d = -\sqrt{5}$ و:

$$\vec{X}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{U}_2 &= e^t(\cos\sqrt{5}t + i\sin\sqrt{5}t)\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}\right\}, \\ &= e^t\begin{pmatrix} 3\cos\sqrt{5}t \\ 2\cos\sqrt{5}t + \sqrt{5}\sin\sqrt{5}t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 3\sin\sqrt{5} \\ 2\sin\sqrt{5}t - \sqrt{5}\cos\sqrt{5}t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین، مطابق ۳.۴.۵ جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ که

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= A\vec{U}_1+B\vec{U}_2=\vec{V}_1+\vec{V}_2,\\
\vec{V}_1 &= Ae^t\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\cos\sqrt{5}-2\sin\sqrt{5}t\\ -3\sin\sqrt{5}t\end{pmatrix}+Be^t\begin{pmatrix} 3\cos\sqrt{3}t\\ 2\cos\sqrt{5}t+\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t\end{pmatrix},\\
\vec{V}_2 &= Ae^t\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t+2\cos\sqrt{5}t\\ \cos\sqrt{5}t\end{pmatrix}+Be^t\begin{pmatrix} 3\sin\sqrt{5}t\\ 2\sin\sqrt{5}t-\sqrt{5}\cos\sqrt{5}t\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند.

۱۰.۴.۵. تمرینات هر یک از دستگاههای زیر را حل کنید:

$$1)\begin{cases} x'=3x,\\ y'=2x-y,\end{cases}\quad 2)\begin{cases} x'=3x-2y,\\ y'=2x-2y,\end{cases}\quad 3)\begin{cases} x'=7x+y,\\ y'=-9x-3y,\end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x'=x-y,\\ y'=2x+4y,\end{cases}\quad 5)\begin{cases} x'=5x+4y,\\ y'=-4x-5y,\end{cases}\quad 6)\begin{cases} x'=-x/2+3y,\\ y'=5x+3y,\end{cases}$$

$$7)\begin{cases} x'=6x+y,\\ y'=2x+y,\end{cases}\quad 8)\begin{cases} x'=5x+3y,\\ y'=-3x+y,\end{cases}\quad 9)\begin{cases} x'=x+4y,\\ y=x+y,\end{cases}$$

$$10)\begin{cases} x'=2x+y,\\ y'=-2x+4y,\end{cases}\quad 11)\begin{cases} x'=3x-y,\\ y'=x+3y,\end{cases}\quad 12)\begin{cases} x'=-5x+y,\\ y'=-4x-3y,\end{cases}$$

$$13)\begin{cases} x'=2x-y,\\ y'=4x+2y,\end{cases}\quad 14)\begin{cases} x'=-x-3y,\\ y'=3x-y,\end{cases}\quad 15)\begin{cases} x'=5x-2y,\\ y'=4x-y,\end{cases}$$

$$16)\begin{cases} x'=3x+2y,\\ y'=-2x+y,\end{cases}\quad 17)\begin{cases} x'=-4x+y,\\ y'=2x+y,\end{cases}\quad 18)\begin{cases} x'=4x+y,\\ y'=-x+4y,\end{cases}$$

$$19)\begin{cases} x'=x-2y,\\ y'=3x+3y,\end{cases}\quad 20)\begin{cases} x'=-5x-8y,\\ y'=2x-y,\end{cases}\quad 21)\begin{cases} x'=2x-y,\\ y'=x+3y,\end{cases}$$

$$22)\begin{cases} x'=x+y/6,\\ y'=-3x+2y,\end{cases}\quad 23)\begin{cases} x'=-5x+3y,\\ y'=4x+3y,\end{cases}\quad 24)\begin{cases} x'=-5x-y,\\ y'=4x-y,\end{cases}$$

$$25)\begin{cases} x'=4x-3y,\\ y'=3x-2y,\end{cases}\quad 26)\begin{cases} x'=-x-4y,\\ y'=4x+7y,\end{cases}\quad 27)\begin{cases} x'=-2x+2y,\\ y'=-2x+2y,\end{cases}$$

$$28)\begin{cases} x'=x+9y,\\ y'=-x-5y,\end{cases}\quad 29)\begin{cases} x'=-x-8y,\\ y'=x/2+3y,\end{cases}\quad 30)\begin{cases} x'=y,\\ y'=-9x+6y.\end{cases}$$

بخش ۵.۵ روش تغییر پارامتر در حل دستگاه خطی غیر همگن

۱.۵.۵. روش حل فرض کنید بخواهیم دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت و مرتبهٔ دوم $\vec{X}'=A\vec{X}\neq F$ را حل کنیم. فرض کنید $\vec{X}_1$ و $\vec{X}_2$ مجموعه‌ای از جوابهای بنیادی برای دستگاه همگن $X'=AX$ است. در این صورت جواب خصوصی دستگاه غیر همگن به شکل $X_p=c_1\vec{X}_1+c_2\vec{X}_2$ است که توابع c_1 و c_2 در معادلهٔ $c_1'\vec{X}_1+c_2'\vec{X}_2=\vec{F}$ صدق می‌کنند.

۲.۵.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}: \frac{dx}{dt} = -2x - 4y + 4t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = -x + y + \frac{3}{2}t^2.$$

حل: فرض کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

دراین صورت دستگاه $\mathscr{E}$ را به شکل $X' = AX + F$ می‌توان نوشت. معادلهٔ مشخصهٔ این دستگاه عبارتست از

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}} \quad &: \quad \begin{vmatrix} \lambda+2 & 4 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \\ &: \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = +2, \lambda_2 = -3. \end{aligned}$$

فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $A\vec{X}_1 = 2\vec{X}_1$، در این صورت

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \Longrightarrow \begin{cases} -2\alpha - 4\beta = 2\alpha, \\ -\alpha + \beta = 2\beta, \end{cases} \Longrightarrow \beta = -\alpha,$$

بنابراین، می‌توان فرض نمود که

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

که به دلیل دلخواه بودن α فرض کرده‌ایم $\alpha = 1$. اکنون با فرض $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $A\vec{X}_2 = -3\vec{X}_2$ داریم

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \Longrightarrow \begin{cases} -2\alpha - 4\beta = -3\alpha, \\ -\alpha + \beta = -3\beta, \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 4\beta,$$

بنابراین، می‌توان فرض نمود که

$$X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

که به دلیل دلخواه بودن β فرض کرده‌ایم $\beta = 1$. پس جواب عمومی معادلهٔ همگن $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\vec{X}_h = A\vec{X}_1 e^{2t} + B\vec{X}_2 e^{-3t},$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند. اکنون با نظر به ۱.۵.۵ فرض می‌کنیم $\vec{X}_p = c_1\vec{X}_1 e^{2t} + c_2\vec{X}_2 e^{3t}$. بنابراین

$$c_1'\vec{X}_1 e^{2t} + c_2'\vec{X}_2 e^{-3t} = \vec{F}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c_1' e^{2t} + 4c_2' e^{-3t} = 4 + 1, \\ -c_1' e^{2t} + c_2' e^{-3t} = \dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{-3t} \\ -e^{2t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ \dfrac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \begin{cases} c_1' = -\dfrac{1}{5}(6t^2 - 4t - 1)e^{-2t}, \\ c_2' = \dfrac{1}{10}(3t^2 + 8t + 2)e^{3t}. \end{cases}$$

در نتیجه با انتگرال گیری داریم:

$$c_1(t) = \frac{1}{5}(t+3t^2)e^{-2t}, \quad c_2(t) = \frac{1}{10}(t^2+2t)e^{3t}.$$

و بنابراین جواب خصوصی $\mathscr{E}$ چنین است:

$$\begin{aligned}\vec{X}_p &= c_1X_1e^{2t}+c_2X_2e^{-3t}\\ &= \frac{1}{5}(3t^2+t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{10}(t^2+2t)\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

و جواب عمومی آن عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathscr{S}\ :\ \vec{X} &= \vec{X}_p+\vec{X}_h\\ &= \begin{pmatrix}t^2+t\\-t^2/2\end{pmatrix}+Ae^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+Be^{-3t}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathscr{S}\quad :\quad x(t) = t^2+t+Ae^{2t}+4Be^{3t}, \quad y(t) = -\frac{t^2}{2}-Ae^{2t}+Be^{-3t}.$$

که A و B اعداد ثابت دلخواهند.

۳.۵.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}\ :\ \frac{dx}{dt} = -3x+2t+2t, \quad \frac{dy}{dt} = -3y+t+1.$$

حل: این دستگاه را به شکل $X' = AX+F$ می‌توان نوشت که

$$A = \begin{pmatrix}-3 & 2\\0 & -3\end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix}2t\\t+1\end{pmatrix}, \quad C_{\mathscr{E}}\ :\ (\lambda+3)^2 = 0.$$

فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ و $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix}\gamma\\\theta\end{pmatrix}$ بردارهایی هستند $A\vec{X}_2 = -3\vec{X}_2$ و $A\vec{X}_1 = \vec{X}_2-3\vec{X}_1$. بنابراین

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}-3 & 2\\0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\\theta\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}\gamma\\\theta\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}-3 & 2\\0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\\\theta\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix},\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}-3\gamma+2\theta = -3\gamma,\\ -3\theta = -3\theta,\\ -3\alpha+2\beta = \gamma-3\alpha,\\ -3\beta = \theta-3\beta,\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\theta = 0,\\ \gamma = 2\beta.\end{array}\right.$$

پس α و β دلخواهند. با فرض $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ داریم:

$$\vec{X}_1^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{U}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

فرض $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ نیز داریم:

$$\vec{X}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین، جواب عمومی $\mathscr{E}_k$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_h \ : \ \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} &= Ae^{-3t}U_1 + Be^{-3t}U_2 \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} e^{-3t} + Bte^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{S}_h \quad : \quad x_h(t) = Ae^{-3t} + 2Bte^{-3t}, \quad y_h(t) = Be^{-3t}.$$

حال نظر به ۱.۵.۵ فرض می‌کنیم $\vec{X}_p = c_1e^{-3t}\vec{U}_1 + c_2e^{-3t}\vec{U}_2$ که c_1 و c_2 توابع دلخواهی هستند که در معادلهٔ $c_1'e^{-3t}\vec{U}_1 + c_2'e^{-3t}\vec{U}_2 = \vec{F}$ صدق می‌کنند. بنابراین:

$$c_1'e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2'e^{-3t}\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t+1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} c_1' + 2tc_2' = (2t)e^{3t}, \\ c_2' = (t+1)e^{3t}, \end{cases} \implies \begin{cases} c_1' = -2t^2e^{3t}, \\ c_2' = (t+1)e^{3t}, \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = \dfrac{-2}{27}(9t^2 - 6t + 2), \\ c_1 = \dfrac{1}{9}(3t+2). \end{cases}$$

بنابراین:

$$\vec{X}_p = c_1e^{-3t}\vec{U}_1 + c_2e^{-3t}\vec{U}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{27}(6t-1) \\ \dfrac{1}{9}(3t+2) \end{pmatrix}.$$

و جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \quad &: \quad \vec{X} = \vec{X}_p + \vec{X}_h, \\ &: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 24t-4 \\ 9t+6 \end{pmatrix} + Ae^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Be^{-3t}\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathscr{S} \quad : \quad x(t) = Ae^{-3t} + 2Be^{-3t} + \frac{8}{9}t - \frac{4}{27}, \quad y(t) = Be^{-3t} + \frac{t}{3} + \frac{2}{9}.$$

۴.۵.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} \ : \ \frac{dx}{dt} = -y + \sec t, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

حل: این دستگاه را به صورت $X' = AX + F$ می‌نویسیم که

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

معادلهٔ مشخصهٔ $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$C_{\mathscr{E}} : \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 : \lambda^2 + 1 = 0 : \lambda = 0 \pm 1i.$$

فرض کنیم $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ و $A(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2) = i(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2)$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+ci \\ b+di \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} a+ci \\ b+di \end{pmatrix}, \Longrightarrow \begin{cases} -b-di = -c+ai, \\ a+ci = -d+bi, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d = -a, \\ b = c. \end{cases}$$

پس a و c دلخواهند، با فرض $a = 1$ و $c = 0$ داریم $d = -1$ و $b = 0$ و

$$\vec{X}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \vec{U}_1 = e^{at}(\cos t + i\sin t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\Longrightarrow \quad \vec{U}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

با فرض $a = 0$ و $c = 1$ نیز داریم $d = 0$ و $b = 1$ و

$$\vec{X}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \vec{U}_2 = e^{0t}(\cos t + i\sin t)\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\Longrightarrow \quad \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

بنابراین، جواب عمومی دستگاه همگن $\mathscr{E}_h$ نظیر به $\mathscr{E}$ عبارتست از $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ که

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 + i\vec{V}_2 &= A\vec{U}_1 + B\vec{U}_2 \\ &= \begin{pmatrix} A\cos t - B\sin t \\ A\sin t + B\cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} A\sin t + B\cos t \\ -A\cos t + B\sin t \end{pmatrix} \\ \vec{X}_p &= \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \\ &= A\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

حال نظر به ۱.۵.۵ فرض کنیم

$$\vec{X}_p = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

— آخرین بروز رسانی: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ —

که c_1 و c_2 در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$c_1'\begin{pmatrix} \cos t+\sin t \\ \sin t-\cos t \end{pmatrix}+c_2'\begin{pmatrix} -\sin t+\cos t \\ \cos t+\sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} c_1' = -\tan t, \\ c_2' = -1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \ln|\cos t|, \\ c_2 = -t. \end{cases}$$

و جواب خصوصی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \ln|\cos t| \\ t\sin t + \cos t \ln|\cos t| \end{pmatrix}.$$

پس، جواب عمومی $\mathscr{E}$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \quad &: \quad \vec{X} = \vec{X}_p + \vec{X}_h, \\ &: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \ln|\cos t| \\ t\sin t + \cos t \ln|\cos t| \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} \cos t+\sin t \\ \sin t-\cos t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} -\sin t+\cos t \\ \cos t+\sin t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathscr{S} \quad : \quad \begin{cases} x = A(\cos t+\sin t)+B(\cos t-\sin t)+t\cos t-\sin t\ln|\cos t|, \\ y = A(\sin t-\cos t)+B(\cos t+\sin t)+t\sin t+\cos t\ln|\cos t|. \end{cases}$$

۵.۵.۵. تمرینات هر یک از دستگاههای داده شده را حل کنید:

$$1)\ \begin{cases} x'+2x-y=-e^{2t}, \\ y'+3x-2y=6e^{2t}, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x'=x+y-\cos t, \\ y'+y+2x=\cos t+\sin t, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x'=y+\tan^2 t-1, \\ y'+x=\tan t, \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x'+4x+2y=2/(e^t-1), \\ y'=6x+3y-3/(e^t-1), \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x'=y, \\ y'+x=1/\cos t, \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} x'=3x-4y+1, \\ y'=2x-3y+t. \end{cases}$$

بخش ۶.۵ استفاده از روش لاپلاس

۱.۶.۵. روش لاپلاس در این روش با اعمال تبدیل لاپلاس بر تک‌تک معادلات موجود در یک دستگاه معادلات، به یک معادلهٔ جبری می‌رسیم. پس از حل این دستگاه و بکار گیری تبدیل لاپلاس معکوس، جواب مساله بدست خواهد آمد.

۲.۶.۵. مثال دستگاه زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E} : \frac{dx}{dt} = -7x+y+5, \qquad \frac{dy}{dt} = -2x-5y-37t, \qquad x(0)=y(0)=0.$$

حل: با لاپلاس گرفتن از طرفین معادلات داده شده داریم:

$$\begin{cases} s\mathscr{L}\{x\}-x(0)=-7\mathscr{L}\{x\}+\mathscr{L}\{y\}+\dfrac{5}{s}, \\ s\mathscr{L}\{y\}-y(0)=-2\mathscr{L}\{x\}-5\mathscr{L}\{y\}-\dfrac{37}{s^2}, \end{cases} \implies \begin{cases} (x+7)X+7Y=\dfrac{5}{s}, \\ 2X+(s+5)Y=-\dfrac{37}{s^2}. \end{cases}$$

که $X=\mathscr{L}\{x\}$ و $Y=\mathscr{L}\{y\}$، نتیجه اینکه

$$X(s)=\frac{5s^2+25s-37}{s^2(s^2+125+37)}, \qquad Y(s)=\frac{-47s-259}{s^2(s^2+12s+37)}.$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{s+6}{(s+6)^2+1}\right\} \\ &= 1-t-e^{-6t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= 1-t-e^{-6t}\cos t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{7}{s^2}-\frac{s+6}{(s+6)^2+1}+\frac{1}{(s+6)^2+1}\right\} \\ &= 1-7t-e^{-6t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+e^{-6t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= 1-7t-e^{-6t}\cos t+e^{-6t}\sin t. \end{aligned}$$

۳.۶.۵. مثال دستگاه معادلات داده شده را حل کنید:

$$\mathscr{E}:\ \frac{dx}{dt}=2x+3y+t, \quad \frac{dy}{dt}=-3x+2y, \quad x(0)=-1, \quad y(0)=0.$$

حل: با لاپلاس گرفتن از طرفین معادلات داده شده فرض $X=\mathscr{L}\{x\}$ و $Y=\mathscr{L}\{y\}$ داریم:

$$\begin{cases} s\mathscr{L}\{x\}-x(0)=2\mathscr{L}\{X\}+3\mathscr{L}\{y\}+\dfrac{1}{s^2}, \\ s\mathscr{L}\{y\}-y(0)=-3\mathscr{L}\{x\}+2\mathscr{L}\{y\}, \end{cases} \implies \begin{cases} (s-2)X(s)-3Y(s)=1+\dfrac{1}{s^2} \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} X(s)=\dfrac{(s^2+1)(s-2)}{s^2(s^2+4s+13)}, \\ Y(s)=-\dfrac{3(s^2+1)}{s^2(s^2+4s+13)}, \end{cases}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{13}.\frac{1}{s}+\frac{3}{4}.\frac{1}{s^2}+\frac{15}{13}.\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}-\frac{503}{156}.\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}\\
&= -\frac{2}{13}+\frac{3}{4}s+\frac{15}{13}e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}-\frac{503}{156}e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}\\
&= -\frac{2}{13}+\frac{3}{4}t+\frac{15}{13}e^{-2t}\cos 3t-\frac{503}{156}e^{-2t}\sin 3t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{12}{169}.\frac{1}{s}-\frac{3}{13}.\frac{1}{s^2}-\frac{12}{169}.\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}-\frac{171}{169}.\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}\\
&= \frac{12}{169}-\frac{3}{13}t-\frac{12}{169}e^{-2t}\cos 3t-\frac{171}{169}e^{-2t}\sin 3t.
\end{aligned}$$

۴.۶.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{E}:\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}=4x, & x(0)=0, \quad x'(0)=1,\\[2mm] 4\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{d^2y}{dt^2}=9y, & y(0)=0, \quad y'(0)=2.\end{cases}$$

حل: با لاپلاس گرفتن از معادلات دستگاه داده شده و فرض $X=\mathscr{L}\left\{x\right\}$ و $Y=\mathscr{L}\{y\}$ داریم:

$$\begin{cases} s^2\mathscr{L}\left\{x\right\}-sx(0)-x'(0)+sL\left\{y\right\}-y(0)=4L\left\{x\right\},\\ 4sL\left\{x\right\}-4x(0)-s^2\mathscr{L}\left\{y\right\}+sy(0)+y'(0)=9L\left\{y\right\},\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}(s^2-4)X+sy=0,\\ 4sX-(s^2+9)Y=s-2,\end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} X(s)=\dfrac{s^2-2s}{s^2+9s^2-36},\\[2mm] Y(s)=-\dfrac{(s-2)(s^2-4)}{s^2+9s^2-36}.\end{cases}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{15}.\frac{s}{s^2+12}+\frac{4}{5}.\frac{1}{s^2+12}-\frac{2+\sqrt{3}}{30}.\frac{1}{s+\sqrt{3}}-\frac{2-\sqrt{3}}{30}.\frac{1}{s-\sqrt{3}}\right\}\\
&= \frac{2}{15}\cos\sqrt{12}+\frac{4}{5\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}t-\frac{2+\sqrt{3}}{30}e^{-\sqrt{3}t}-\frac{2-\sqrt{3}}{30}e^{\sqrt{3}t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{16}{15}.\frac{s}{s^2+12}+\frac{32}{15}.\frac{1}{s^2+12}+\frac{2+\sqrt{3}}{30\sqrt{3}}.\frac{1}{s+\sqrt{3}}-\frac{2-\sqrt{3}}{30\sqrt{3}}.\frac{1}{s-\sqrt{3}}\right\}. \end{aligned}$$

۵.۶.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\mathscr{S}\ :\ x'+3x-4y=\cos t,\quad y'-3y+2x=t,\quad x(0)=0,\quad y(0)=1.$$

حل: ابتدا از طرفین معادلات دستگاه داده شده، لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} s\mathscr{L}\left\{x\right\}-x(0)+3\mathscr{L}\left\{x\right\}-4\mathscr{L}\left\{y\right\}=\dfrac{s}{s^2+1}, \\ s\mathscr{L}\left\{y\right\}-y(0)-3\mathscr{L}\left\{y\right\}+2\mathscr{L}\left\{x\right\}=\dfrac{1}{s^2}, \end{cases}$$

با فرض $X=\mathscr{L}\left\{x\right\}$ و $Y=\mathscr{L}\{y\}$، داریم

$$\begin{cases} (s+3)X-4Y=\dfrac{s}{s^2+1}, \\ 2X+(s-3)Y=\dfrac{1+s^2}{s^2}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(s)=\dfrac{7/2}{s-1}-\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3s+1}{s^2+1}-\dfrac{4}{s^2}, \\ Y(s)=\dfrac{7/2}{s-1}-\dfrac{5/2}{s+1}+\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s}-\dfrac{3}{s^2}, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\dfrac{7}{2}e^t-5^{-t}+\dfrac{3}{2}\cos t+\dfrac{1}{2},\sin t-4t \\ y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}=\dfrac{7}{2}e^t-\dfrac{5}{2}e^{-t}+\cos t-3t-1. \end{cases}$$

۶.۶.۵. مثال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x''=3(y-x+z), & x(0)=0, & x'(0)=0, \\ y''=x-y, & y(0)=0, & y'(0)=-1, \\ z''=-z, & z(0)=1, & z'(0)=0. \end{cases}$$

حل: با محاسبهٔ لاپلاس هر یک از معادلات داده شده داریم:

$$\begin{cases} s^2X=3(Y-X+Z) \\ s^2Y+1=X+Y \\ s^2Z-s=-Z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{3(s-1)}{s^2(s^2+4)} \\ Y=\dfrac{3(s-1)}{s^2(s^2+1)(^2+4)}-\dfrac{1}{s^2+1} \\ Z=\dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

اکنون، با محاسبهٔ لاپلاس معکوس داریم:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{3}{4}(1-t)-\dfrac{3}{4}\cos 2t+\dfrac{3}{8}\sin 2t \\ y(t)=\dfrac{3}{4}(1-t)+\dfrac{1}{4}\cos 2t-\dfrac{1}{8}\sin 2t-\cos t \\ z(t)=\cos t \end{cases}$$

۷.۶.۵. تمرینات هر یک از دستگاههای داده شده را حل کنید:

$$1)\ \begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, & x(0)=0, \quad x'(0)=0,\\ x''+2y'+x=0, & y(0)=0, \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x''-3x'+2x+y'-y=0, & x(0)=0, \quad x'(0)=0,\\ -x'+x+y''-5y'+4y=0, & y(0)=1, \quad y'(0)=0, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x''-x'+9x-y''-y'-3y=0, & x(0)=1, \quad x'(0)=1,\\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0, & y(0)=0, \quad y'(0)=0, \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x+y=0, & x(0)=1,\\ y'+x=0, & y(0)=-1, \end{cases} \qquad 5)\ \begin{cases} x'+x=y+e^t, & x(0)=1,\\ y'+y=x+e^t, & y(0)=1, \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} x'=-x+y+z+e^t, & x(0)=0,\\ z'=x+y+z+4, & z(0)=0, \end{cases} \qquad 7)\ \begin{cases} x'=-y-z, & x(0)=-1,\\ y'=-x-z, & y(0)=0,\\ z'=-x-y, & z(0)=1, \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} tx'=-x+y+z+t, & x(1)=0,\\ ty'=x-y+z+t^3, & y(1)=0,\\ tz'=x+y+z+4, & z(1)=0, \end{cases} \qquad 9)\ \begin{cases} 3tx'=2x+y-z, & x(1)=1,\\ 2ty'=x+3y+z, & y(1)=1,\\ 6tz'=-x+7y+5z, & z(1)=1, \end{cases}$$

$$10)\ \begin{cases} x'+y'=2\sinh t, & x(0)=1,\\ y'+z'=e^t, & y(0)=1,\\ x'+z'=2e^t+e^t, & z(0)=0. \end{cases}$$

۸.۶.۵. مثال دستگاه معادلات انتگرالی داده شده را حل کنید:

$$\mathscr{E}:\begin{cases} \varphi_1(x)=x+\displaystyle\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=1+\displaystyle\int_0^x \sinh(x-t)\varphi_1(t)\,dt-\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

حل: با لاپلاس گرفتن از دو طرف هر یک از معادلات وفرض $\Phi_i=\mathscr{L}\{\varphi_i\}$، داریم

$$\begin{cases} \Phi_1(s)=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s+1}\Phi_1(s)+\dfrac{1}{s^2}\Phi_2(s),\\ \Phi_2(s)=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s^2+1}\Phi_1(s)-\dfrac{1}{s-1}\Phi_2(s). \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Phi_1(s)=\dfrac{s^2+s-1}{s(s-1)(s^2+1)},\\ \Phi_2(s)=\dfrac{s^3-s^2+1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}. \end{cases}$$

بنابراین با لاپلاس معکوس گیری داریم:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \mathscr{L}^{-1}\{\Phi_1(s)\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{2}.\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{s^2+1}-\frac{3}{2}\frac{s}{s^2+1}\right\}\\ &= 1+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{3}{2}\cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \mathscr{L}^{-1}\big\{\Phi_2(s)\big\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}.\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{2}.\frac{s}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+1}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\cos x-\sin x+\frac{1}{2}\cosh x.\end{aligned}$$

۹.۶.۵. تمرینات هر یک از دستگاههای داده شده را حل کنید:

$$1)\ \begin{cases}\varphi_1(x)=1-2\displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=4x-\displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+4\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt,\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}\varphi_1(x)=e^x+\displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt-\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=-x-\displaystyle\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt,\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}\varphi_1(x)=x+\displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=1-\displaystyle\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt,\end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases}\varphi_1(x)=e^x-\displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+4\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=1-\displaystyle\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt,\end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases}\varphi_1(x)=2x-\displaystyle\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=-2-4\displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+3\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt,\end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases}\varphi_1(x)=2-\displaystyle\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt-4\int_0^x \varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=1-\displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt-\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt,\end{cases}$$

کتاب‌نامه

[1] Agarwal, R.P.; O'Regan, D.; An introduction to ordinary differential equations. Universitext. Springer, New York, 2008. xii+321 pp. ISBN: 978-0-387-71275-8

[2] Atkinson, K.E.; Han, W.; Stewart, D.; Numerical solution of ordinary differential equations. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2009. xii+252 pp.+loose erratum. ISBN: 978-0-470-04294-6

[3] Arnold, V.I.; Ordinary differential equations. Translated from the Russian by Roger Cooke. Second printing of the 1992 edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. ii+334 pp. ISBN: 978-3-540-34563-3; 3-540-34563-9

[4] Ahmad, S.; Rama Mohana Rao, M.; Theory of ordinary differential equations. With applications in biology and engineering. Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi, 1999. viii+335 pp. ISBN: 81-85938-94-6

[5] Butcher, J.C.; Numerical methods for ordinary differential equations. Second edition. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008. xx+463 pp. ISBN: 978-0-470-72335-7

[6] Chicone, C.; Ordinary differential equations with applications. Second edition. Texts in Applied Mathematics, 34. Springer, New York, 2006. xx+636 pp. ISBN: 978-0387

[7] Cronin, J.; Ordinary differential equations. Introduction and qualitative theory. Third edition. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 292. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. xx+381 pp. ISBN: 978-0-8247-2337-8; 0-8247-2337-6

[8] Coddington, E.A.; Carlson, R.; Linear ordinary differential equations. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997. xii+341 pp. ISBN: 0-89871-388-9

[9] Ding, T.; Approaches to the qualitative theory of ordinary differential equations. Dynamical systems and nonlinear oscillations. Peking University Series in Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. x+383 pp. ISBN: 978-981-270-468-9; 981-270-468-X

[10] Emanuel, G.; Solution of ordinary differential equations by continuous groups. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. vi+220 pp. ISBN: 1-58488-243-3

[11] Filippov, V.V.; Basic topological structures of ordinary differential equations. Translated from the Russian. Mathematics and its Applications, 432. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. xiv+516 pp. ISBN: 0-7923-4951-2

[12] Greenspan, D.; Numerical solution of ordinary differential equations for classical, relativistic and nano systems. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2006. x+204 pp. ISBN: 978-3-527-40610-4; 3-527-40610-7

[13] Godunov, S.K.; Ordinary differential equations with constant coefficient. Translated from the 1994 Russian original by Tamara Rozhkovskaya. Translations of Mathematical Monographs, 169. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. x+282 pp. ISBN: 0-8218-0656-4

[14] Hairer, E.; Wanner, G.; Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems. Second edition. Springer Series in Computational Mathematics, 14. Springer-Verlag, Berlin, 1996. xvi+614 pp. ISBN: 3-540-60452-9

[15] Hastings, S.P.; McLeod, J.B.; Classical methods in ordinary differential equations. With applications to boundary value problems. Graduate Studies in Mathematics, 129. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xviii+373 pp. ISBN: 978-0-8218-4694-0

[16] Hairer, E.; Wanner, G.; Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems. Second revised edition, paperback. Springer Series in Computational Mathematics, 14. Springer-Verlag, Berlin, 2010. xvi+614 pp. ISBN: 978-3-642-05220-0

[17] Hsu, S.B.; Ordinary differential equations with applications. Series on Applied Mathematics, 16. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006. x+244 pp. ISBN: 981-256-319-9

[18] Hartman, P.; Ordinary differential equations. Corrected reprint of the second (1982) edition [Birkhäuser, Boston, MA; MR0658490 (83e:34002)]. With a foreword by Peter Bates. Classics in Applied Mathematics, 38. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. xx+612 pp. ISBN: 0-89871-510-5

[19] Hsieh, P.F.; Sibuya, Y.; Basic theory of ordinary differential equations. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1999. xii+468 pp. ISBN: 0-387-98699-5

[20] Ibragimov, N.H.; Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. Wiley Series in Mathematical Methods in Practice, 4. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1999. xviii+347 pp. ISBN: 0-471-97430-7

[21] Jackiewicz, Z.; General linear methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2009. xvi+482 pp. ISBN: 978-0-470-40855-1

[22] Jordan, D.W.; Smith, P. Nonlinear ordinary differential equations. An introduction for scientists and engineers. Fourth edition. Oxford University Press, Oxford, 2007. viii+531 pp. ISBN: 978-0-19-920825-8

[23] Lin, C.Y.; Theory and examples of ordinary differential equations. Series on Concrete and Applicable Mathematics, 10. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011. xiv+540 pp. ISBN: 978-981-4307-12-3; 981-4307-12-2

[24] Mattheij, R.M.M.; Molenaar, J.; Ordinary differential equations in theory and practice. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1996. xii+407 pp. ISBN: 0-471-95674-0

[25] Makarets, M.V.; Reshetnyak, V.Yu.; Ordinary differential equations and calculus of variations. Book of problems. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995. x+372 pp. ISBN: 981-02-2191-6

[26] O'Regan, D.; Existence theory for nonlinear ordinary differential equations. Mathematics and its Applications, 398. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997. vi+196 pp. ISBN: 0-7923-4511-8

[27] Sanchez, D.A.; Ordinary differential equations. A brief eclectic tour. Classroom Resource Materials Series. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002. xii+132 pp. ISBN: 0-88385-723-5

[28] Sachdev, P.L.; A compendium on nonlinear ordinary differential equations. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997. xiv+918 pp. ISBN: 0-471-53134-0

[29] Salaff, S.; Yau, S.T.; Ordinary differential equations. Second edition. International Press, Cambridge, MA, 1998. vi+72 pp. ISBN: 1-57146-065-9

[30] Schwarz, F.; Algorithmic Lie theory for solving ordinary differential equations. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 291. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. x+434 pp. ISBN: 978-1-58488-889-5; 1-58488-889-X

[31] Schroers, Bernd J.; Ordinary differential equations. A practical guide. African Institute of Mathematics Library Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. x+118 pp. ISBN: 978-1-107-69749-2

[32] Soare, M.V.; Teodorescu, P.P.; Toma, I.; Ordinary differential equations with applications to mechanics. Translated from the 1999 Romanian original, revised and extended by Teodorescu and Toma. Mathematics and Its Applications (Springer), 585. Springer, Dordrecht, 2007. x+488 pp. ISBN: 978-1-4020-5439-6; 1-4020-5439-4

[33] Somasundaram, D.; Ordinary differential equations. A first course. CRC Press, Boca Raton, FL; Narosa Publishing House, New Delhi, 2001. viii+295 pp. ISBN: 0-8493-0988-3

[34] Rai, B.; Choudhury, D.P.; Freedman, H.I.; A course in ordinary differential equations. CRC Press, Boca Raton, FL; Narosa Publishing House, New Delhi, 2002. xii+463 pp. ISBN: 0-8493-0992-1

[35] Robinson, J.C.; An introduction to ordinary differential equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. xiv+399 pp. ISBN: 0-521-82650-0; 0-521-53391-0

[36] Roberts, C.E.; Ordinary differential equations. Applications, models, and computing. With 1 CD-ROM (Windows). Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2010. xviii+584 pp. ISBN: 978-1-4398-1908-1

[37] Polyanin, A.D. ; Zaitsev, V.F.; Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. Second edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. xxvi+787 pp. ISBN: 1-58488-297-2

[38] Walter, W.; Ordinary differential equations. Translated from the sixth German (1996) edition by Russell Thompson. Graduate Texts in Mathematics, 182. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. xii+380 pp. ISBN: 0-387-98459-3