۳-۹- روش اپراتور ها (عملگرها)

این روش برای یافتن جواب خصوصی معادله با ضرایب ثابت با همان محدودیت های روش ضرایب نا معین کاربرد دارد . اگر معادله $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b(x)$ را به کمک نماد $D^k=\dfrac{d^k}{dx^k}$ به صورت زیر بنویسیم:

$$\underbrace{(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)}_{f(D)}y=b(x)\quad\Rightarrow\quad F(D)y=b(x)$$

آنگاه: $y_p=\dfrac{1}{f(D)}b(x)$. ($f(D)$ را چند جمله ای اپراتوری نامیم)

بنابراین لازم است ویژگیهای عملگر معکوس $\dfrac{1}{f(D)}$ برای حالات مختلف $b(x)$ بررسی شود.

$\dfrac{1}{f(D)}$ خاصیت خطی دارد یعنی برای اعداد ثابت d,c:
$$\frac{1}{f(D)}\big(c\,b_1(x)+d\,b_2(x)\big)=c\frac{1}{f(D)}b_1(x)+d\frac{1}{f(D)}b_2(x)$$

$\dfrac{1}{D}$ عملگر عکس مشتق گیری یعنی انتگرال گیری است $\left(\dfrac{1}{D}b(x)=\int b(x)dx\right)$ و $\dfrac{1}{D^k}$ به مفهوم k بار انتگرال گیری است.

اگر $b(x)$ جز توابع محدود شده در حالت ضرایب نامعین نباشد ولی $\dfrac{1}{f(D)}b(x)$ مفهوم انتگرال گیری مشخصی داشته باشد می توان از روش اپراتور معکوس بهره جست (این موضوع به ندرت اتفاق می افتد).

حالات مختلف $b(x)$ جهت محاسبه $\dfrac{1}{f(D)}b(x)$:

حالت اول: اگر $b(x)$ یک چند جمله ای از درجه m باشد ابتدا $f(D)$ را بر حسب توان های صعودی نوشته (عکس استاندارد) و عدد ۱ را بر آن تقسیم می کنیم:
$$\frac{1}{f(D)}b(x)=\underbrace{(c_0+c_1D+\cdots+c_mD^m+\cdots)}_{\text{خارج قسمت}}b(x)$$

از آنجایی که $b(x)$ از درجه m می باشد خارج قسمت تقسیم فوق را کافیست تا جمله D^m ادامه دهیم چون مشتق مراتب بالاتر از m چند جمله ای $b(x)$ صفر می شود. سمت راست تساوی فوق با مشتق گیری های متوالی از $b(x)$ به راحتی قابل محاسبه است.

اگر $b(x)$ عدد ثابت باشد $(b(x)=c)$ و $f(D)=a_0+a_1D+\cdots+D^n$، آنگاه:
$$\frac{1}{f(D)}b(x)=\frac{1}{f(D)}c=\frac{c}{a_0}\quad(a_0\neq 0)$$

یا در واقع چون a_0 همان $f(0)$ است پس: $\dfrac{1}{f(D)}c=\dfrac{c}{f(0)}\quad(f(0)\neq 0)$

حالت دوم: اگر $b(x)=ce^{ax}$، آنگاه با توجه به رابطه $\dfrac{1}{f(D)}ce^{ax}=c\dfrac{1}{f(a)}ce^{ax}\quad(f(a)\neq 0)$، به دست آوردن جواب خصوصی معادله به a بستگی دارد:

الف: اگر a ریشه معادله مشخصه (مفسر) نباشد $(f(a)\neq 0)$، به سادگی $y_p=c\,\dfrac{e^{ax}}{f(a)}$

ب: اگر a ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار k باشد (یعنی $f(D)=(D-a)^k\,g(D)$ که $g(a)\neq 0$) آنگاه: $y_p=c\,\dfrac{x^ke^{ax}}{k!\;g(a)}$

اگر $b(x)=c$ عدد ثابت باشد می توان آنرا نمایی با $a=0$ در نظر گرفت پس برای حالتی که $f(0)=0$ و ریشه صفر معادله مشخصه دارای مرتبه تکرار k باشد (یعنی $f(D)=D^kg(D)$) آنگاه: $y_p=c\dfrac{x^k}{k!\,g(0)}$

حالت سوم: اگر $b(x)$ به صورت $\sin\alpha x$ یا $\cos\alpha x$ باشد چون $e^{i\alpha x}=\cos\alpha x+i\sin\alpha x$، $\dfrac{1}{f(D)}b(x)$ را برای $b(x)=e^{i\alpha x}$ به کمک حالت قبل محاسبه می کنیم (بسته به این که $i\alpha$ ریشه معادله مشخصه باشد یا نباشد دو وضعیت متفاوت داریم)، جواب حاصل (z_p) غیر حقیقی است یعنی می توان آنرا به شکل $z_p=\mathrm{Re}(z_p)+i\,\mathrm{Im}(z_p)$ نوشت، حال اگر $b(x)$ به صورت $\cos\alpha x$ باشد $y_p=\mathrm{Re}(z_p)$ و اگر $b(x)$ به صورت $\sin\alpha x$ باشد، قسمت موهوی z_p جواب است یعنی $y_p=\mathrm{Im}(z_p)$.

در حالت خاص اگر $i\alpha$ ریشه معادله مشخصه نباشد $(f(i\alpha)\neq 0)$ می توان برای محاسبه $\frac{1}{f(D)}\sin\alpha x$ یا $\frac{1}{f(D)}\cos\alpha x$ در چند جمله ای اپراتوری $f(D)$ به جای D^2 قرار دهیم $D^2=(i\alpha)^2=-\alpha^2$ که در نهایت اگر $f(D)$ فقط شامل توانهای زوج باشد به سادگی $\frac{1}{f(D)}$ محاسبه می شود و اگر $f(D)$ شامل توانهای فرد نیز باشد با جایگذاری $-\alpha^2$ به جای D^2 و ساده نمودن، $f(D)$ به شکل چند جمله ای ازدرجه حداکثر یک تبدیل می شود پس:

$$\frac{1}{f(D)}=\frac{1}{c+dD}=\frac{c-dD}{c^2-d^2D^2}=\frac{c-dD}{c^2+\alpha^2d^2}$$

که تاثیر آن بر $\sin\alpha x$ یا $\cos\alpha x$ به سادگی با مشتق گیری قابل محاسبه است.

حالات خاص دیگر:

الف: اگر مشتقات ظاهر شده در معادله همه از مرتبه زوج باشند و طرف دوم معادله $\sin\alpha x$ باشد و $i\alpha$ ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار k $(k=0,1,2,\ldots)$ باشد آنگاه:

$$\begin{cases} y_p=c\,x^k\sin\alpha x & k \ \text{ج} \\ y_p=c\,x^k\cos\alpha x & k \ \text{د} \end{cases}$$

ب: اگر مشتقات ظاهر شده در معادله همه از مرتبه فرد باشند و طرف دوم معادله $\sin\alpha x$ باشد و k مرتبه تکرار ریشه $i\alpha$ از معادله مفسر باشد $(k=0,1,2,\ldots)$ آنگاه:

$$\begin{cases} y_p=c\,x^k\sin\alpha x & k \ \text{د} \\ y_p=c\,x^k\cos\alpha x & k \ \text{ج} \end{cases}$$

دو نکته فوق برای وقتی که طرف دوم معادله $\cos\alpha x$ باشد نیز با عوض کردن جای تمامی $\sin$ ها و $\cos$ ها معتبر است.

حالت چهارم: اگر $b(x)$ به شکل ضرب تابع نمایی در یک تابع دلخواه مانند $u(x)$ باشد یعنی $b(x)=ce^{ax}u(x)$ آنگاه:

$$\frac{1}{f(D)}b(x)=\frac{1}{f(D)}ce^{ax}u(x)=ce^{ax}\frac{1}{f(D+a)}u(x)$$

روش عملگر(اپراتور) برای حالتی که طرف دوم $(b(x))$ معادله نمایی باشد بر روش ضرایب نا معین ارجحیت دارد . اما در حالتی که طرف دوم چند جمله ای خصوصا از درجه بالا باشد،روش مناسبی نیست.

روش عملگر ها و خواص $f(D)$ علاوه بر کاربرد در یافتن جواب خصوصی معادلات نا همگن با ضرایب ثابت بطور مستقیم نیز مورد سوال واقع می شوند که علاوه بر روابط فوق می توان به رابطه ی زیر نیز اشاره نمود:

$$\frac{1}{f(D)}x\,u(x)=x\frac{1}{f(D)}u(x)-\frac{f'(D)}{\left(f(D)\right)^2}u(x)$$

برای به دست آوردن جواب خصوصی معادله کوشی- اویلر ناهمگن بعد از به دست آوردن جواب عمومی معادله همگن متناظر می توان از روش تغییر پارامتر ها استفاده نمود و یا با توجه به این مطلب که جهت تبدیل معادله کوشی به معادله با ضرایب ثابت طرف راست معادله $(b(x))$ با تغییر متغیر $x=e^z$ تبدیل به $b(e^z)$ می شود می توان از روش عملگر ها با تاثیر چند جمله ای ا پراتوری بر روی $b(e^z)$ جواب خصوصی را محاسبه نمود.

۳-۱۰- جواب معادله مرتبه دوم خطی به صورت $y=uv$ (روش حذف ضریب مشتق)

اگر در معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=b(x)$ ، y_1 به سادگی محاسبه نشود (نتوان از روش کاهش مرتبه استفاده نمود) این معادله دارای جواب به شکل $y=uv$ میباشد که:

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$ (بدون ثابت انتگرال گیری)

و v از حل معادله فاقد v' زیر به دست می آید:

$$v''+(q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x))v=\frac{b(x)}{u}$$

با توجه به مقدار ضریب v معادله فوق در هر یک از حالات زیر قابل حل است:

$$1 \quad \Big| \; -2D + D^2$$

$$-\frac{1}{2D} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}D - \frac{1}{16}D^2$$

$$-1 + \frac{1}{2}D$$

$$\frac{1}{2}D$$

$$-\frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^1$$

$$\frac{1}{4}D^2$$

$$+\frac{1}{4}D^2 \pm \frac{1}{8}D^3$$

$$-\frac{1}{8}D^3$$

$$y'' + 3y' - 2y = e^{-x}x^2, \quad (D^2 + 3D - 2)y = e^{-x}x^2, \quad y_p = \frac{1}{D^2 + 3D - 2} e^{-x}x^2$$

$$D^2 \sin x = -\sin x, \quad \frac{1}{D}(5x^2 + 2e^{-2x}) = 5\frac{1}{3}x^3 - 2\frac{1}{2}e^{-2x}$$

8.8.2) $y'' - 2y' = 2x, \ y_h = c_1 + c_2 e^{2x}, \quad (D^2 - 2D)y = 2x, \quad y_p = \frac{1}{D^2 - 2D}2x, \ y_p = (\frac{-1}{2D} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}D)2x = -(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{2x} - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$$

$$\frac{1}{D^5 - D^3}(2x^2) = \frac{1}{D^3(D^2 - 1)}(2x^2) = \frac{1}{D^3}(\frac{1}{D^2 - 1}(2x^2))$$

$$* \;\; y''+2y'+1=e^{x}+e^{-x},\;\; r^{2}+2r+1=0,\;\; r=-1,-1,\quad e^{-x}, xe^{-x},\quad y_{h}=c_{1}e^{-x}+c_{2}xe^{-x}$$

$$(D^{2}+2D+1)y=e^{x}+e^{-x}\Rightarrow y_{p}=\frac{1}{D^{2}+2D+1}(e^{x}+e^{-x})=\frac{1}{(D+1)^{2}}(e^{x}+e^{-x})=\frac{1}{(D+1)^{2}}e^{x}+\frac{1}{(D+1)^{2}}e^{-x}=\frac{1}{(1+1)^{2}}e^{x}+\frac{x^{2}}{2!}e^{-x}$$

$$* \;\; y''+3y'+2=3e^{x}+5e^{-x},\;\; r^{2}+3r+2=0,\;\; r=-1,-2,\quad e^{-x}, e^{-2x},\quad y_{h}=c_{1}e^{-x}+c_{2}e^{-2x}$$

$$(D^{2}+3D+2)y=3e^{x}+5e^{-x}\Rightarrow y_{p}=\frac{1}{(D+1)(D+2)}(3e^{x}+5e^{-x})=\frac{1}{(D+1)(D+2)}3e^{x}+\frac{1}{(D+1)(D+2)}5e^{-x}=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{5x^{1}}{2\times 1!}e^{-x}$$

$$* y''+3y'=e^{2x}+3e^{-3x}+5,\quad r^{2}+3r=0,\;\; r=0,-3,\;\; e^{0x}, e^{-3x},\quad y_{h}=c_{1}+c_{2}e^{-3x}$$

$$(D^{2}+3D)y=e^{2x}+3e^{-3x}+5\Rightarrow y_{p}=\frac{1}{D(D+3)}(e^{2x}+3e^{-3x}+5)=\frac{1}{10}e^{2x}+\frac{x^{1}}{1!}(-e^{-3x})+\frac{x^{1}}{1!}(\frac{5}{3})$$