۳-۸- روش عمومی برای حل معادلات خطی غیر همگن (روش تغییر پارامترها یا لاگرانژ)

به علت محدودیت های موجود در معادلات دیفرانسیلی که با روش ضرایب نا معین می توان جواب خصوصی آنها را تعیین نمود لازم است روش تغییر پارامتر ها به عنوان روشی که برای تعیین جواب خصوصی (y_p) معادلات کلی (بدون محدودیت) با داشتن جواب عمومی معادله همگن متناظر (y_h) کاربرد دارد بیان شود.

اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ ، n جواب مستقل خطی معادله همگن متناظر با معادله ناهمگن $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ باشد (یعنی $y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$) آنگاه $y_p = v_1y_2 + v_2y_2 + \dots + v_ny_n$ که ابتدا مشتقات v_k ها $(k = 1, 2, \dots, n)$ از حل دستگاه زیر به کمک روش کرامر حاصل و سپس با انتگرال گیری از آنها (بدون ثابت انتگرال گیری) v_k ها به عنوان توابعی از x مشخص می شوند.

ستون k ام

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' + \cdots + y_n v_n' = 0 \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' + \cdots + y_n' v_n' = 0 \\ \quad \vdots \\ y_1^{(n-1)} v_1' + y_2^{(n-1)} v_2' + \cdots + y_n^{(n-1)} v_n' = b(x) \end{cases} \Rightarrow v_k' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 & y_n \\ y_1' & y_2' & 0 & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & b(x) & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}$$

در محاسبه v_k' کسر مخرج همان رونسکین می باشد و صورت از تعویض ستون k ام رونسکین با بردار سمت راست به دست آمده است.

برای معادله خطی مرتبه دوم $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ که بیشتر در مسائل مطرح می شود:

$$y_p = -y_1 \int \frac{b(x)y_2}{w(x)}dx + y_2 \int \frac{b(x)y_1}{w(x)}dx \ , \quad w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

برای معادله خطی مرتبه سوم $y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ ، $y_p = v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3$ که در آن:

$$v_1 = \int \frac{b(x)(y_2y_3' - y_2'y_3)}{w(x)}dx, \quad v_2 = \int \frac{b(x)(-y_1y_3' - y_1'y_3)}{w(x)}dx, \quad v_3 = \int \frac{b(x)(y_1y_2' - y_1'y_2)}{w(x)}dx, \quad w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

(حفظ کردن این روابط برای معادلات مرتبه بزرگتر از ۲ توصیه نمی شود و همان فرمول کلی کاربردی است)

همانطور که اشاره شد در محاسبه v_k ها از روی مشتقات آنها در انتگرال گیری ، ثابت انتگرال گیری را نمی نویسیم و اگر مساله با شرط اولیه ای در نقطه x_0 مطرح شده باشد ،مثلاً برای معادله مرتبه دوم $\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ، v_2, v_1 بصورت زیر محاسبه می گردند:

$$v_1 = -\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)y_2(t)}{w(t)}dt, \quad v_2 = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)y_1(t)}{w(t)}dt$$

محاسبه انتگرال ها در این روش ممکن است وقت گیر باشد بنابر این فقط در مواردی که روش ضرایب نامعین جواب نمی دهد.استفاده از این روش پیشنهاد می شود.

(شیوه به دست آمدن دستگاه فوق برای معادله $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$:

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2, \quad y_p' = v_1'y_1 + y_1'v_1 + v_2'y_2 + y_2'v_2$$

و با فرض: $y_1v_1' + y_2v_2' = 0$

$$y_p'' = y_1''v_1 + y_1'v_1' + y_2''v_2 + v_2'y_2'$$

جایگزیری در معادله دیفرانسیل:

$$\underline{y_1''v_1} + v_1'y_1' + \underline{\underline{y_2''v_2}} + v_2'y_2' + a_1(x)(\underline{y_1'v_1} + \underline{\underline{y_2'v_2}}) + a_0(x)(\underline{v_1y_1} + \underline{\underline{v_2y_2}}) = b(x) \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' = b(x) \end{cases}$$

6.7.2) $y_h = c_1 + c_2 e^{-x}, \ y_p = x^0 e^x (Ax^2 + Bx + C)$

7.7.2) $y_p = x^2 e^{-5x}(A)$

9.7.2) $y_p = x^1((Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x)$

10.7.2) $y_p = x^0 \ e^x (A\sin x + B\cos x)$

11.7.2) $r^2 + 2r + 5 = 0, \ r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i, \ e^{-x}\sin 2x, e^{-x}\cos 2x \Rightarrow y_h = e^{-x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$

$y_p = x^1 \ e^{-x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$

=========

$\sin x + x\cos x, \ y_p = \dots((Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x)$

$(x+1)\sin 2x - \cos x, \ y_p = \dots((Ax+B)\sin 2x + (Cx+D)\cos 2x) + (E\sin x + F\cos x)$