$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \qquad a < s$$

$$L\{\sin(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\sin(at)dt, \quad u = e^{-st},\ dv = \sin(at)dt, \quad du = -se^{-st}, \quad v = -\frac{1}{a}\cos(at)$$

$$= e^{-st}(-\frac{1}{a}\cos(at))\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{s}{a}e^{-st}\cos(at)dt = 0 + \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos(at)dt, \quad u = e^{-st},\ dv = \cos(at)dt, \quad du = -se^{-st}, \quad v = \frac{1}{a}\sin(at)$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left(\frac{1}{a}e^{-st}\sin(at)\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin(at)dt\right) = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}(\frac{s}{a}L\{\sin(at)\}) \Rightarrow \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)L\{\sin(at)\} = \frac{1}{a} \Rightarrow \left(\frac{a^2+s^2}{a^2}\right)L\{\sin(at)\} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow L\{\sin(at)\} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+s^2}{a^2}} \Rightarrow L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\{\sin(hat)\} = L\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\} = \frac{1}{2}L\{e^{at}-e^{-at}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+a-(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$L\{\cos(hat)\} = L\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\} = \frac{1}{2}L\{e^{at}+e^{-at}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+a+(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$L\{t\} = \int_0^\infty t\, e^{-st} dt, \quad u = t, \quad dv = e^{-st} dt, \quad du = dt, \quad v = \frac{-1}{s} e^{-st}$$

$$= t\left(\frac{-1}{s} e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$= t\left(\frac{-1}{s} e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s}\left(\frac{-1}{s} e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left(\frac{-1}{s} e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$L\{t^2\} = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt, \quad u = t^2, \quad dv = e^{-st} dt, \quad du = 2t dt, \quad v = \frac{-1}{s} e^{-st}$$

$$= t^2\left(\frac{-1}{s} e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{2}{s}\int_0^\infty t e^{-st} dt = 0 + \frac{2}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in W, \qquad L\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad \Gamma(n+1) = n!, \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

فصل پنجم-تبدیل لاپلاس

۵-۱- تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t \geq 0$ تعریف می شود را با نماد $F(s)$ یا $L(f(t))$ نمایش داده و عبارت است از:

$$\mathbf{L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad s > 0}$$

اگر انتگرال ناسره فوق موجود باشد، تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می نامیم و تابع $f(t)$ را تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ گوییم و آن را با نماد $L^{-1}[f(t)]$ نشان می دهیم.

اگر تابع f بر بازه $[0,\infty)$ قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، تبدیل لاپلاس آن موجود است ($a > 0$ مناسبی وجود دارد که $F(s)$ برای $s > a$ همگرا شود و در این حالت همواره $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$). ممکن است تابعی در شرایط فوق صدق نکند اما تبدیل لاپلاس آن موجود باشد.

تابع را بر قطعه ای پیوسته گوئیم هر گاه برای هر $t > 0$ این تابع در بازه $[0,t]$ قطعه ای پیوسته باشد.

تابع f را بر $[0,\infty)$ از مرتبه نمایی نامیم هر گاه $s > 0$ موجود باشد که $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{st}} = 0$ ($\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0$)، چند جمله ای ها و توابع کراندار از مرتبه نمایی می باشند.

قضیه لرچ: اگر f و g دو تابع قطعه ای پیوسته و از مرتبه نم ایی باشند به طوری که $L[f(t)] = L[g(t)]$ آنگاه به جز در نقاط ناپیوستگی f و g داریم $f(t) = g(t)$. پس در فضای توابع قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمایی، L یک به یک است یعنی $L^{-1}[F(s)]$ به صورت منحصر به فرد مشخص می شود.

تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم که به کمک تعریف به دست می آیند و حفظ کردن آن ها ضروری است و به کمک آنها می توان تبدیل لاپلاس معکوس توابع را نیز محاسبه نمود.

$F(s) = L[f(t)]$	$f(t)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	t^α
$\frac{e^{-as}}{s}$	$u_a(t)$
e^{-as}	$\delta_a(t)$
$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-Ts}}$	f تابعی متناوب با دوره تناوب T

$F(s) = L[f(t)]$	$f(t)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

تبدیل لاپلاس و لاپلاس معکوس **خاصیت خطی** دارند یعنی به ازای $c_1, c_2 \in R$

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)]$$

$$L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 L^{-1}[F_1(s)] + c_2 L^{-1}[F_2(s)]$$

تابع پله ای (هویساید):

این تابع برای $a \geq 0$ با نمادهای $u_a(t)$ یا $u(t-a)$ و یا $H(t-a)$ نمایش داده شده و به شکل زیر تعریف می گردد:

$$\mathbf{U_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}}$$

بنابراین $u_0(t) = 1$ و $u_\infty(t) = 0$.

توابع چند ضابطه ای را ابتدا برحسب مجموع توابع پله ای نوشته و سپس تبدیل لاپلاس آن ها را محاسبه می کنیم . عامل های این مجموع را می توان به هر یک از دو روش زیر به دست آورد:

روش ۱) هر ضابطه ضربدر هویساید نقطه شروع بازه منهای هویساید نقطه انتهای بازه.

روش ۲) ضابطه پایین منهای ضابطه بالا ضربدر تابع هویساید نقطه شروع بازه ضابطه پایین (ابتدا ضابطه اول خود به عنوان یک ضابطه پایین در نظر گرفته می شود).

تابع دلتای دیراک (تابع ضربه):

برای $a \geq 0$ این تابع با نمادهای $\delta_a(t)$ یا $\delta(t-a)$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_a(t) = \delta(t-a) = 0 \quad t \neq a$$

تابع $\delta_a(t)$ در نقطه $t=a$ دارای مقدار بی نهایت و در سایر نقاط صفر است.

همچنین برای تابع دلتای دیراک:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,dt = 1\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\delta(t-a)\,dt = g(a)$$

۵-۲-تبدیل لاپلاس حاصلضرب توابع

مشتق از تبدیل لاپلاس
$$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s) \overset{n=1}{\Rightarrow} L(t f(t)) = -F'(s) \quad (1) \quad \text{یا} \quad L^{-1}(F'(s)) = -t\,L^{-1}(F(s))$$

انتگرال از تبدیل لاپلاس
$$L[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^{\infty} F(s)ds \quad (2)$$

قاعده اول انتقال
$$L(e^{at} f(t)) = F(s-a) \;\Rightarrow\; L^{-1} F(s-a) = e^{at} L^{-1}(F(s)) \quad (3)$$

قاعده دوم انتقال
$$L(u_a(t) f(t)) = e^{-as} L(f(t+a)) \;\Rightarrow\; L^{-1}(e^{-as} F(s)) = u_a(t) f(t-a) \quad (4)$$

$$L(\delta_a(t) f(t)) = e^{-as} f(a) \quad (5)$$

$$L(f(kt)) = \frac{1}{k} F(\frac{s}{k}) \;\Rightarrow\; L^{-1}(F(ks)) = \frac{1}{k} f(\frac{t}{k}) \quad (6)$$ (k ثابت غیر صفر)

به کمک رابطه ۱ می توان لاپلاس معکوس توابعی را محاسبه نمود که لاپلاس معکوس مشتق یا انتگرال آن را می دانیم (توابع شامل لگاریتم و یا معکوس مثلثاتی). همچنین برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب چند جمله ای می توان از این فرمول استفاده نمود

به کمک رابطه ۲ و تعریف تبدیل لاپلاس با $s=0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(s)ds$$

برای حل معادلات دیفرانسیلی که طرف دوم آنها تابع دلتا باشد از تبدیل لاپلاس استفاده می شود.

۵-۳- تبدیل لاپلاس مشتق

اگر $f(t)$ روی بازه $[0,\infty)$ از مرتبه نمایی و پیوسته و $f'(t)$ قطعه ای پیوسته باشد آنگاه:

$$L(f'(t)) = s\,L(f(t)) - f(0)$$

همچنین اگر f و f' پیوسته و از مرتبه نمایی و f'' قطعه ای پیوسته باشد:

$$L(f''(t)) = s^2 L(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

و در حالت کلی داریم:

$$L(f^n(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

در حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت می توان از روابط فوق بهره جست.

در فرمول های بالا اگر مقدار $f(0)$ یا $f'(0)$ یا ... موجود نباشد، به جای آن ها از حد راست تابع در $t=0$ نیز می توان استفاده کرد.

با توجه به این مطلب که تبدیل لاپلاس هر تابع قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمایی در بی نهایت صفر می شود فرمول های مهم زیر برای محاسبه مقدار f و مشتقات آن در نقطه صفر به دست می آیند.

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$f'(0) = \lim_{s\to\infty} (s^2F(s) - sf(0))$$

و به همین ترتیب:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{s\to\infty} (s^{n+1}F(s) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - \cdots - sf^{(n-1)}(0))$$

اگر f تابعی قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمایی بر $[0,\infty)$ باشد:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

۵-۴- تبدیل لاپلاس انتگرال

اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد یعنی $F(s) = L(f(t))$ آنگاه:

$$L\left(\int_0^t f(t)\,dt\right) = \frac{1}{s}F(s)$$

و با لاپلاس معکوس گیری از طرفین رابطه بالا:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right) = \int_0^t L^{-1}(F(s))\,dt = \int_0^t f(t)\,dt$$

۵-۵- کانولوشن (پیچش یا تلفیق) توابع

کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f*g)(t)$ یا $f(t)*g(t)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$\mathbf{(f*g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx}$$

خواص کانولوشن:

۱) $f*g = g*f$

۲) $f*0 = 0*f = 0$

۳) $f*(c_1g + c_2h) = c_1(f*g) + c_2(f*h) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

۴) $f*(g*h) = (f*g)*h$

۵) $e^{at}(f*g) = e^{at}f * e^{at}g \quad (a \in \mathbb{R})$

۶) $1*f = \int_0^t f(x)\,dx$

لاپلاس کانولوشن دو تابع:

در حالت کلی می دانیم $L(fg) \neq L(f)L(g)$ اما $L(f*g) = L(f)L(g)$ و در نتیجه $L^{-1}(F(s)G(s)) = f*g$ که روابط مهمی می - باشند و قابل تعمیم به هر تعداد تابع می‌باشند مثلاً: $L(1*f) = \frac{1}{s}L(f)$

۵-۶- حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس

همانطوری که در بخشهای قبل اشاره شد می‌توان در حل معادلات با مقدار اولیه از تبدیل لاپلاس استفاده نمود . بدین منظور ابتدا تبدیل لاپلاس معادله را بدست می‌آوریم سپس مقدار $F(s)$ را محاسبه نموده و در نهایت معکوس $F(s)$ یعنی $f(t)$ را به دست می - آوریم که همان جواب معادله است.

محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس همان گونه که در بخش های قبل مشاهده گردید مستلزم دانستن خوب تبدیل لاپلاس و خواص مختلف آن است.

نکاتی که در محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند قبلا نیز از آنها استفاده نموده ایم:

۱) در محاسبه تبدیل معکوس خارج قسمت دو چند جمله‌ای ابتدا سعی می‌کنیم از تفکیک کسرها استفاده نماییم و اگر این تجزیه امکان‌پذیر نباشد سعی می‌شود از طریق مربع کامل نمودن مخرج مساله عمل نمود که در این حالت عموماً جواب به شکل توابعی از $e^{at}, \sin at, \cos at, \sinh at, \cosh at$ و یا توابعی بر حسب $t,1$ به دست می‌آید.

۲) معکوس تبدیل لاپلاس شامل جملات لگاریتمی یا معکوس مثلثاتی به کمک فرمول مشتق از تبدیل لاپلاس امکان پذیر است (خواص لگاریتم در تبدیل ضرب به جمع و تقسیم به تفریق در محاسبه لاپلاس و لاپلاس معکوس مفید می‌باشد)

۳) لاپلاس معکوس توابعی از e^{-as} در خارج قسمت دو چند جمله‌ای به کمک نکته ۱ و لاپلا س حاصلضرب تابع هویساید در تابع دیگر قابل محاسبه است.

۴) در برخی موارد استفاده از عکس فرمول پیچش $L^{-1}(F(s)G(s)) = L^{-1}(F(s)) * L^{-1}(G(s))$ ضروری است.

۵-۷- معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل انتگرال

معادلاتی که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد را معادلات انتگرالی نامیم. معادله دیفرانسیل انتگرال، معادله انتگرالی است که شامل مشتقات تابع مجهول نیز می‌باشد. در برخی از انواع این معادلات، انتگرال موجود در مساله پیچش دو تابع است و لذا با تشخیص پیچش و اعمال تبدیل لاپلاس $L(\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)\,dx) = F(s)G(s)$ می‌توان این نوع معادلات را حل نمود.

فصل ششم- دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

۶-۱- تعاریف اولیه

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی گوییم، اگر هر یک از معادلات دستگاه، یک معادله خطی باشد پس هر دستگاه معادله خطی مرتبه اول با n مجهول دارای شکل کلی زیر است.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

در دستگاه فوق $y_1, y_2, \ldots, y_n$ توابع مجهول و x متغیر مستقل است. می‌توان این دستگاه را به شکل ماتریسی $Y' = A(x)Y + b(x)$ نشان داد که در آن:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

در حالتی که $b(x) = 0$ دستگاه را همگن و در غیر این صورت ناهمگن نامند.

اگر ماتریس $A(x)$ و بردار $b(x)$ در همسایگی I از x_0 پیوسته باشند آنگاه تمامی قضایا و نکات بیان شده برای معادلات خطی همگن و ناهمگن در فصل سوم در اینجا نیز صادق می‌باشند از جمله:

۱) دستگاه معادلات مذکور با شرط اولیه $Y(x_0) = Y_0$ دارای جواب منحصربفرد است.

۲) جواب عمومی دستگاه معادله همگن $Y' = A(x)Y$ به صورت $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + \ldots + c_nY_n$ می‌باشد که $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ، n جواب مستقل خطی دستگاه می‌باشند. $(\det(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = w(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \neq 0)$

۳) جواب عمومی دستگاه ناهمگن $Y' = A(x)Y + b(x)$ ، حاصل جمع جواب عمومی دستگاه معادله همگن و جواب خصوصی Y_p می‌باشد یعنی : $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + \ldots + c_nY_n + Y_p$

۴) رابطه آبل : اگر $A(x)$ ماتریس پیوسته و $Y(x)$ $(Y(x) = [Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)])$ ماتریس جواب دستگاه معادلات همگن $Y' = A(x)Y$ باشد آنگاه:

$$\det Y(x) = \det Y(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\,dx}$$

پس $Y(x)$ اساسی است اگر $\det Y(x)$ در یک نقطه دلخواه مانند $x = x_0$ ناصفر باشد.

هر معادله دیفرانسیل از مرتبه n را می‌توان به صورت یک دستگاه شامل n معادله، n مجهول و از مرتبه اول نوشت.

یک دستگاه با تابع z و متغیر مستقل x

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \xrightarrow{y=z_1, y'=z_2, \ldots, y^{(n-1)}=z_n} \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{cases}$$

۶-۲- روشهای حل دستگاه معادلات خطی

۱) روش حذفی: در این روش سعی می‌کنیم به نحوی با حذف برخی توابع مجهول و مشتقات این توابع، دستگاه را به یک معادله با یک متغیر و یک تابع تبدیل و با حل این معادله ابتدا یکی از توابع مجهول به دست می آید و سپس به کمک معادلات دستگاه با جایگذاری سایر توابع مجهول را محاسبه می‌کنیم.

۲) روش اپراتوری (عملگری): از این روش برای حل دستگاه معادلات با ضرایب ثابت استفاده می شود، فرض کنید که دستگاه دو معادله با دو محهول y,x را بتوانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$\begin{cases} P_1(D)x + P_2(D)y = b_1(t) \\ P_3(D)x + P_4(D)y = b_2(t) \end{cases}$$

که در آن D اپراتوری است که به صورت $D = \frac{d}{dt}$, $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$, ... تعریف شده است و $P(D)$ ها چند جمله ای‌هایی بر حسب D هستند، به کمک روش کرامر داریم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1(t) & P_2(D) \\ b_2(t) & P_4(D) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(D) & P_2(D) \\ P_3(D) & P_4(D) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1(D)}{P(D)} \iff P(D)x = \Delta_1(D) \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} P_1(D) & b_1(t) \\ P_3(D) & b_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(D) & P_2(D) \\ P_3(D) & P_4(D) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2(D)}{P(D)} \iff P(D)y = \Delta_2(D)$$

که دو معادله دیفرانسیل خطی بر حسب تابع xو y و متغیر مستقل t با ضرایب ثابت می باشند و به کمک روشهای مطرح شده در فصل سوم قابل حل است.

اگر طرف دوم دستگاه یعنی $b_1(t)$ و $b_2(t)$ صفر باشند برای پیدا نمودن جواب دستگاه باید دو معادله $P(D)x = 0$ و $P(D)y = 0$ را حل کنیم پس در این حالت شکل هر دو جواب یکسان بوده و تفاوت در ضرایب آنها می باشد.

مخرج کسرهای فوق ($(P(D)$) که برای محاسبه x و y به کار می روند اگر یک چندجملهای از درجه m باشد آنگاه تعداد ثابت هایی که پس از حل دستگاه در توابع مجهول x و y دیده می شود، در مجموع باید m باشد و در نتیجه تعداد شرایط اولیه مورد نیاز برای محاسبه همه این ثابت ها برابر m خواهد بود.

این روش قابل تعمیم است و با روش‌های دیگر از جمله روش حذفی نیز می‌توان دستگاه اپراتوری فوق را حل نمود.

۳) استفاده از تبدیل لاپلاس

اگر دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرط اولیه در نقطه صفر مطرح شده باشد، با اعمال تبدیل لاپلاس بر دستگاه خطی و بالاخص استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس مشتق، می‌توان معادله دیفرانسیل را به یک دستگاه جبری تبدیل نمود و از دستگاه حاصل تبدیل لاپلاس توابع مجهول را محاسبه و در نهایت با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس، جواب دستگاه به دست می‌آید.

در حالت خاص که دستگاه $Y' = AY + b(x)$ با ضرایب ثابت و از مرتبه اول باشد لاپلاس جواب عبارتست از:

$$L(Y(x)) = (sI - A)^{-1}(Y(0) + B(s))$$

$$\left(Y' = AY + b(x) \overset{L}{\Rightarrow} L(Y') = AL(Y) + L(b(x)) \Rightarrow sY(s) - Y(0) = AY(s) + B(s) \Rightarrow (sI - A)Y(s) = Y(0) + B(s) \right.$$

$$\left. \Rightarrow Y(s) = (sI - A)^{-1}(Y(0) + B(s)) \right)$$

۴) استفاده از مقادیر ویژه و بردار ویژه

برای حل دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت $Y' = AY$، می‌توان از این روش استفاده نمود، بدین منظور ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را به دست می‌آوریم که متناظر با هر مقدار ویژه λ_i و بردار ویژه v_i جواب $Y_i = e^{\lambda_i x} v_i$ برای معادله به دست می‌آید، پس اگر ماتریس A دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ باشد، بردارهای ویژه متناظر یعنی $v_1, v_2, ..., v_n$ مستقل خطی اند و جواب عمومی دستگاه عبارت است از:

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + ... + c_n Y_n(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} v_n$$