تابع هدف $\ln(v) - E[\ln(L/B_1)]$، می‌باشد. این عبارت‌ها را در حالت $K = 2$ ،$N = 1$، $r = \frac{1}{9}$ ،$S_0 = 5$ ،$S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}$ ،$S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$، و $P(\omega_1) = \frac{3}{5}$، حساب کرده و استراتژی معاملاتی بهینه را به‌دست آورید.

مسئلهٔ ۳-۲ (تابع مطلوبیت کشش همسان) فرض کنید $u(w) = \gamma^{-1}w^{\gamma}$، که در آن $-\infty < \gamma < 1$ و $\gamma \neq 0$. نشان دهید که تابع وارون $I(i) = i^{-1/(1-\gamma)}$، ضریب لاگرانژ

$$\lambda = v^{-(1-\gamma)}\{E[(L/B_1)^{-\gamma/(1-\gamma)}]\}^{(1-\gamma)}$$

مقدار بهینه ثروت دست‌یافتنی

$$W = \frac{v(L/B_1)^{-1/(1-\gamma)}}{E[(L/B_1)^{-\gamma/(1-\gamma)}]}$$

و مقدار بهینه تابع هدف $E[u(W)] = \lambda v/\gamma$، می‌باشد. این عبارت‌ها را تحت مدل مسئلهٔ ۲-۲ محاسبه کرده و استراتژی معاملاتی بهینه را به‌دست آورید.

۳-۲ مسائل مصرف ـ سرمایه‌گذاری

یک فرایند مصرف[1] $C = (C_0, C_1)$ تشکیل یافته است از یک عدد نامنفی C_0 و یک متغیر تصادفی نامنفی C_1. یک برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری[2] متشکل است از یک زوج (C, H)، که در آن C یک فرایند مصرف است و H یک استراتژی معاملاتی است. یک برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری را در صورتی پذیرفتنی[3] خوانیم که اولاً $C_0 + V_0 = v$ (مقدار پولی که در زمان $t = 0$ فراهم است) و در ثانی $C_1 = V_1$. همواره فرض می‌کنیم $v \geqslant 0$.

مقدار C_t را باید به‌عنوان مقداری که توسط سرمایه‌گذار در زمان t مصرف می‌شود پنداشت. چون C_0 مصرف در زمان صفر و چون $V_0 = H_0 + \sum H_n S_n(0)$ مقدار سرمایه‌گذاری شده در آن زمان است، مقدار پول v مهیا در زمان صفر باید حداقل مساوی $C_0 + V_0$ باشد. چون $V_1 = H_0 B_1 + \sum H_n S_n(1)$ مقدار پول فراهم در زمان $t = 1$ است، باید داشته باشیم $C_1 \leqslant V_1$. حال یک سرمایه‌گذار آگاه که تنها می‌تواند در زمان‌های $t = 0$ و $t = 1$ مصرف کند پولی را در هیچ یک از این دو زمان بدون استفاده نخواهد گذاشت، بنابراین این سرمایه‌گذار احتمالاً برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری‌ای را که پذیرفتنی نباشد اتخاذ نخواهد کرد.

1. consumption process 2. consumption-investment plan 3. admissible

سؤلی که به‌طور طبیعی پیش می‌آید این است که با یک برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری مفروض و با مقدار پول ابتدایی v، چگونه می‌توان بررسی کرد که (C, H) پذیرفتنی است؟ البته یک راه آن است که V_1 را حساب کرده و سپس بررسی کنیم که آیا هر دوی $v = C_0 + V_0$ و $C_0 = V_1$ برقرار هستند. توجه کنید که اگر (C, H) به واقع پذیرفتنی باشد، آنگاه C_1 یک مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی است که برای هر اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک Q داریم

$$E_Q[C_1/B_1] = E_Q[V_1/B_1] = V_0$$

که از آنجا

$$E_Q[C_0 + C_1/B_1] = v \tag{۲-۱۴}$$

حال سؤال سخت‌تر این است: با فرض $v \geqslant 0$ و یک فرایند مصرف C، چگونه می‌توان فهمید که استراتژی معاملاتی H وجود دارد که (C, H) پذیرفتنی است؟ خوب، اگر C_1 یک مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی باشد، آنگاه استراتژی معاملاتی H وجود دارد به‌طوری که $C_1 = V_1 = H_0 B_1 + \sum H_n S_n$. اگر به‌علاوهٔ (۲-۱۴) برای یک Q برقرار باشد، آنگاه $C_0 + V_0 = v$، که در آن صورت (C, H) پذیرفتنی است. ملاحظه کنید که تنها و تنها وقتی $E_Q[C_0 + C_1/B_1]$ برای تمامی اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک یک مقدار را به‌دست می‌دهد که C_1 دست‌یافتنی باشد. پس می‌توان یافته‌های اخیر را بدین شکل جمع‌بندی کرد:

(۲-۱۵) فرض کنیم مقدار پول ابتدایی $v \geqslant 0$ و فرایند مصرف C مفروض باشند. شرط لازم و کافی برای وجود استراتژی معاملاتی H که (C, H) پذیرفتنی باشد آن است که برای هر اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک Q داشته باشیم.

$$C_0 + E_Q[C_1/B_1] = v$$

مثال ۱-۲ (ادامه) با $Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ این مدل کامل است. البته برای آنکه فرایند مصرف (C_0, C_1) بخشی از یک برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری پذیرفتنی باشد باید داشته باشیم $0 \leqslant C_0 \leqslant v$ و $C_1 \geqslant 0$. همچنین از (۲-۱۵) باید داشته باشیم

$$v - C_0 = \frac{9}{10} E_Q C_1 = \frac{3}{10}[C_1(\omega_1) + C_1(\omega_2) + C_1(\omega_3)]$$

■

فرض کنید که یک سرمایه‌گذار با ثروت ابتدایی v شروع کرده و بخواهد یک برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری پذیرفتنی را چنان انتخاب کند که مقدار موردانتظار مطلوبیت مصرف در هر دو زمان ۰ و ۱ ماکزیمم شود. در اینجا تابع مطلوبیت $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ مقعر، مشتق‌پذیر، و اکیداً صعودی فرض می‌شود. شکل ریاضی مسئلهٔ موردنظر این چنین است:

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & u(C_0)+E[u(C_1)]\\
\text{subject to}\quad & C_0+H_0B_0+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n(0)=v\\
& C_1-H_0B_1-\sum_{n=1}^{N}H_nS_n(1)=0\\
& C_0\geqslant 0\qquad C_1\geqslant 0\qquad H\in\mathbb{R}^{N+1}
\end{aligned}\tag{۲-۱۶}$$

همچون مسئلهٔ پرتفوی بهینه، این مسئله مصرف ـ سرمایه‌گذاری را می‌توان هم با نظریهٔ بهینه‌سازی معمول و هم با روش محاسباتی ریسک خنثایی حل کرد. برای آنکه روش اول را توضیح دهیم، مثال زیر را درنظر بگیرید:

مثال ۱-۲ (ادامه) فرض کنید $u(c)=\ln(c)$. چون $\ln(c)\to-\infty$ وقتی‌که $c\searrow 0$، می‌توان قیود صریح نامنفی در (۱۶-۲) را حذف و c را مثبت فرض کرد. با فرض

$$P(\omega_1)=\frac{1}{2}\quad و \quad P(\omega_2)=P(\omega_3)=\frac{1}{4}\quad و \quad r=\frac{1}{9}$$

مسئلهٔ بهینه‌سازی تبدیل می‌شود به

$$\text{maximize}\quad \ln(C_0)+\frac{1}{2}\ln(C_1(\omega_1))+\frac{1}{4}\ln(C_1(\omega_2))+\frac{1}{4}\ln(C_1(\omega_3))$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to}\quad & C_0=v-H_0-6H_1-10H_2\\
& C_1(\omega_1)=\frac{10}{9}H_0+\frac{60}{9}H_1+\frac{130}{9}H_2\\
& C_1(\omega_2)=\frac{10}{9}H_0+\frac{80}{9}H_1+\frac{90}{9}H_2\\
& C_1(\omega_3)=\frac{10}{9}H_0+\frac{40}{9}H_1+\frac{80}{9}H_2
\end{aligned}\tag{۲-۱۷}$$

. این مسئله ساده می‌شود به

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & \ln(v - H_0 - 6H_1 - 10H_2)\\ & + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{9}H_0 + \frac{60}{9}H_1 + \frac{130}{9}H_2\right)\\ & + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{10}{9}H_0 + \frac{80}{9}H_1 + \frac{90}{9}H_2\right)\\ & + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{10}{9}H_0 + \frac{40}{9}H_1 + \frac{80}{9}H_2\right)\end{aligned}$$

با محاسبهٔ مشتقات جزئی نسبت به H_n و مساوی صفر قرار دادن آنها، به شرایط لازم زیر دست می‌یابیم:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{C_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_3)} &= 0\\ \frac{-6}{C_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{60}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{80}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{40}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_3)} &= 0\\ \frac{-10}{C_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{130}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{90}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{80}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_3)} &= 0 \qquad (۲\text{-}۱۸)\end{aligned}$$

در اینجا هر چهار معادله (۱۷-۲) مورد استفاده قرار گرفتند، و در واقع سه معادله (۱۸-۲) تنها شامل سه مقدار نامعلوم H_0، H_1، و H_2 هستند. علی‌رغم پیچیدگی در حل، این سه معادله را می‌توان برای یافتن استراتژی معاملاتی بهینهٔ H حل نمود، و آنگاه چهار معادله (۱۷-۲) را می‌توان برای به‌دست آوردن فرایند مصرف بهینهٔ C به‌کار گرفت. ■

یک مسئلهٔ مصرف ـ سرمایه‌گذاری کلی (۱۶-۲) را می‌توان به روش مشابه آنچه هم‌اینک برای مثال ۱-۲ به‌کار بردیم حل کرد. در حالت کلی، اولین $N+1$ قید لازم عبارت‌اند از

$$u'(C_0) = E[B_1 u'(C_1)] \qquad (۲\text{-}۱۹)$$

$$u'(C_0)S_n(0) = E[u'(C_1)S_n(1)], \qquad n = 1, \ldots, N \qquad (۲\text{-}۲۰)$$

با استفاده از قیود (۱۶-۲) و جایگزین کردن برای C_0 و C_1 به $N+1$ معادله می‌رسیم که اساساً می‌توان آنها را برای $N+1$ مجهول $H_0, H_1, \ldots, H_N$ حل کرد. سپس با جایگزین کردن این مقادیر

در قیود (۱۶-۲) مقادیر C_0 و C_1 به‌دست می‌آیند. این روند به جوابی از (۱۶-۲) منجر می‌شود مشروط بر آنکه C_0 و C_1 نامنفی باشند (فرضیات مناسبی همچون $u'(c) \to \infty$ برای $c \searrow 0$، موفقیت این روند را تضمین می‌کند).

برای برخی توابع مطلوبیت ممکن است که یک یا تعداد بیشتری از قیود نامنفی به‌صورت تساوی درآیند، که در این مواقع روندی که در بالا توصیف شد ناموفق خواهد بود. گرچه روش‌های استانداردی را می‌توان برای فائق آمدن بر این پیچیدگی به‌کار برد، اما آنها را در اینجا بحث نمی‌کنیم.

توجه کنید که معادلهٔ (۲۰-۲) مشابه شرطی است که باید توسط یک اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک برقرار باشد. بنابراین، جای تعجب نیست که همتای زیر را برای (۶-۲) داریم:

(۲۱-۲) اگر C بخشی از یک جواب به مسئلهٔ مصرف ـ سرمایه‌گذاری بهینه (۱۶-۲) باشد که در $C_0 > 0$ و $C_1(\omega) > 0$ برای هر ω صدق کند، آنگاه تساوی

$$Q(\omega) = P(\omega)B_1(\omega)\ \frac{u'(C_1(\omega))}{u'(C_0)}$$

یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک تعریف می‌کند.

برای دیدن این موضوع، صرفاً توجه کنید که

$$\begin{aligned} E_Q[S_n(1)/B_1] &= \sum Q(\omega)S_n(1,\omega)/B_1(\omega) \\ &= \sum P(\omega)B_1(\omega)\left(\frac{u'(C_1(\omega))}{u'(C_0)}\right)\left(\frac{S_n(1,\omega)}{B_1(\omega)}\right) \\ &= \frac{1}{u'(C_0)}E[u'(C_1)S_n(1)] \end{aligned}$$

در عین حال، اگر $C_0 > 0$ و $C_1(\omega) > 0$ برای هر $\omega \in \Omega$، آنگاه باید شرط لازم مرتبهٔ اول (۲۰-۲) برقرار باشد. در این صورت نتیجه می‌شود که عبارت $E[u'(C_1)S_n(1)]/u'(C_0)$ و بنابراین عبارت $E_Q[S_n(1)/B_1]$ مساوی $S_n(0)$ است. بالاخره با استفاده از (۱۹-۲) به سادگی نتیجه می‌شود که $\sum Q(\omega) = 1$ و بنابراین Q که توسط (۲۱-۲) تعریف شده در واقع یک اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک است.

حال برای حل مسئلهٔ مصرف ـ سرمایه‌گذاری (۱۶-۲) برای یک مدل کامل به رهیافت محاسباتی ریسک خنثایی روی می‌آوریم. ایده آن است که ابتدا از اصل (۱۵-۲) بهره برده و (۱۶-۲) را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && u(C_0) + E[u(C_1)] \\ &\text{subject to} && C_0 + E_Q[C_1/B_1] = v \\ & && C_0 \geqslant 0 \qquad C_1 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

مسائل بهینه‌سازی (۱۶-۲) و (۲۲-۲) اساساً یکی هستند، چرا که اگر زوج (C, H) برای (۱۶-۲) پذیرفتنی باشد، آنگاه C برای (۲۲-۲) پذیرفتنی است؛ به‌عکس، اگر C برای (۲۲-۲) پذیرفتنی باشد، آنگاه H وجود دارد که (C, H) برای (۱۶-۲) پذیرفتنی است.

توجه کنید که استراتژی معاملاتی H اساساً در (۲۲-۲) ظاهر نمی‌شود، بنابراین اولین مرحله رهیافت ریسک خنثایی در حل (۲۲-۲) بسیار ساده‌تر است از حل (۱۶-۲). آنچه این برای مرحلهٔ دوم و مرحلهٔ پایانی باقی می‌گذارد محاسبهٔ استراتژی معاملاتی H است که مطالبهٔ مشروط C_1 را تولید کند، که در آن C_1 مصرف زمان $t = 1$ است که در حل زیر مسئلهٔ (۲۲-۲) به‌دست آمده است. مشابه مسئلهٔ پرتفوی بهینه، این دو مرحله را می‌توان به روش‌های استاندارد حل کرد.

برای حل (۲۲-۲) با یک ضریب لاگرانژ، ابتدا مسئلهٔ غیرمقید

$$\text{maximize} \quad u(C_0) + E[u(C_1)] - \lambda\{C_0 + E[C_1 L/B_1]\} \tag{۲-۲۳}$$

را حل می‌کنیم (به یاد آورید که $E[C_1 L/B_1] = E_Q[C_1/B_1]$). با فرضیات مناسب بر تابع مطلوبیت u برای اطمینان از اینکه جواب بهینه از (۲۲-۲) مقادیر اکیداً مثبتی از مصرف را به‌دست می‌دهند، شرایط لازم مرتبهٔ اول زیر باید برقرار باشند:

$$u'(C_0) = \lambda \qquad , \qquad u'(C_1(\omega)) = \lambda L/B_1$$

بنابراین

$$C_0 = I(\lambda) \qquad , \qquad C_1(\omega) = I(\lambda L/B_1) \tag{۲-۲۴}$$

که در آن $I(\cdot)$ وارون تابع مطلوبیت نهایی $u'(\cdot)$ است. البته، ضریب لاگرانژ λ باید که در قید (۲۲-۲) صدق کند. یعنی

$$I(\lambda) + E_Q[I(\lambda L/B_1)/B_1] = v \tag{۲-۲۵}$$

همچون حالت (۲-۱۳)، تابع وارون I نزولی است بنابراین این معادله معمولاً دارای یک جواب λ است. اگر مقادیر متناظر C_0 و C_1 که به‌وسیلهٔ (۲-۲۴) مشخص می‌شوند، نامنفی باشند، آنگاه آنها جوابی بهینه برای (۲-۲۲) هستند.

اگر این رویه منجر به مقدار منفی برای مصرف شود، آنگاه الگوریتمی پیچیده‌تر را باید برای یافتن جواب (۲-۲۲) به‌کار برد. گر چه چنین الگوریتم‌هایی استاندارد هستند، با وجود این آنها را در اینجا بحث نمی‌کنیم. در چنین حالتی هنوز هم حل کردن (۲-۲۲) از حل کردن (۲-۱۶) ساده‌تر است.

مثال ۲-۳ فرض‌کنید $u(c) = \ln(c)$، پس $u'(c) = 1/c$ و تابع وارون عبارت است از $I(i) = 1/i$. معادلات (۲-۲۴) و (۲-۲۵) تبدیل می‌شوند به

$$C_0 = \frac{1}{\lambda} \qquad , \qquad C_1(\omega) = 1/(\lambda L/B_1)$$

و

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}E_Q[L^{-1}] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}E[1] = \frac{2}{\lambda} = v$$

پس $\lambda = 2/v$ و $C_0 = v/2$، و $C_1(\omega) = vB_1(\omega)P(\omega)/[2Q(\omega)]$. توجه کنید که این‌ها در صورت $v \geqslant 0$ نامنفی هستند. با جایگزین کردن این مقادیر، مقدار ماکزیمم (۲-۲۲) برابر $2\ln(v/2) + E[\ln(vB_1/L)]$ است. ■

مثال ۲-۱ و ۲-۳ (ادامه) با فرض‌های قبلی $L(\omega_1) = \frac{2}{3}$، $L(\omega_2) = L(\omega_3) = \frac{4}{3}$، و $r = \frac{1}{9}$، داریم

$$C_1(\omega) = v\frac{5}{9}L^{-1} = \begin{cases} \frac{5}{6}v & \omega = \omega_1 \\ \frac{5}{12}v & \omega = \omega_2, \omega_3 \end{cases}$$

توجه کنید که همچنان که موردنظر است، معادله (۲-۱۵) و همچنین شرایط لازم (۲-۱۸) برقرار هستند. مقادیر بهینهٔ H_1 و H_2 را با حل دستگاه $C_1/B_1 = v/2 + G^*$ به‌دست می‌آوریم، یعنی،

$$\frac{3}{4}v = \frac{1}{2}v + 0H_1 + 3H_2$$

$$\frac{3}{8}v = \frac{1}{2}v + 2H_1 - 1H_2$$

$$\frac{3}{8}v = \frac{1}{2}v - 2H_1 - 2H_2$$

. گرچه این‌ها سه معادله با دو مجهول هستند، اما جواب منحصر به‌فرد است: $H_1 = \frac{-v}{48}$ و $H_2 = \frac{v}{12}$.
به دلیل $H_0 + 6H_1 + 10H_2 = \frac{v}{2}$، نتیجه می‌شود که $H_0 = -(\frac{5}{24})v$. ■

در جمع‌بندی، اصل (۱۵-۲) حل مسئلهٔ مصرف ـ سرمایه‌گذاری بهینه را به‌طور چشمگیری ساده‌تر می‌کند چرا که اجازه می‌دهد تا مسئلهٔ اولیه را به دو زیرمسئلهٔ ساده‌تر تفکیک کنیم: در زیرمسئلهٔ اول شما تنها به دنبال فرایند مصرف بهینه می‌گردید بدون آنکه نگران استراتژی معامله باشید، و در زیرمسئلهٔ دوم استراتژی معاملاتی را به‌دست می‌آورید که متناظر با جواب زیرمسئلهٔ اول باشد.

مسئلهٔ پایه‌ای مصرف ـ سرمایه‌گذاری (۱۶-۲) را می‌توان از چند جهت تعمیم داد. برای مثال، تابع هدف را می‌توان به‌صورت

$$u(C_0) + \beta E[u(C_1)] \tag{2-26}$$

نوشت که در آن عدد β در $0 < \beta \leqslant 1$ صدق می‌کند. ایده در اینجا مدل‌بندی کردن ارزش زمانی هنگامی است که مصرف رخ می‌دهد که در آن پارامتر مشخص شدهٔ β به‌عنوان عامل تنزیل عمل می‌کند.

تعمیم دیگری از (۱۶-۲) آن است که اجازه دهیم مصرف‌کننده دارای درآمد یا مقرری[1] $\tilde{E}$ در زمان $t = 1$ باشد، که در آن $\tilde{E}$ متغیر تصادفی مشخصی است. سپس مسئلهٔ بهینه‌سازی عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && u(C_0) + E[u(C_1)] \\ &\text{subject to} && C_0 + H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) = v \\ &&& C_1 - H_0 B_1 - \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) = \tilde{E} \\ &&& C_0 \geqslant 0 \qquad C_1 \geqslant 0 \qquad H \in \mathbb{R}^{N+1} \end{aligned} \tag{2-27}$$

زوج $(v, \tilde{E})$ را گاهی اوقات **فرایند مقرری**[2] برای مصرف‌کننده می‌نامند.

1. endowment 2. endowment prosess

مسئلهٔ ۲-۴ فرمول‌های λ، C_0، و C_1 را برای مسئلهٔ مصرف ـ سرمایه‌گذاری برای توابع مطلوبیت زیر به‌دست آورید:

(الف) $u(c) = -\exp\{-c\}$

(ب) $u(c) = \gamma^{-1}c^{\gamma}$، که $-\infty < \gamma < 1$ و $\gamma \neq 0$.

مسئلهٔ ۲-۵ نشان دهید که اگر تابع هدف برای مسئلهٔ مصرف ـ سرمایه‌گذاری همچون عبارت (۲-۲۶) باشد، آنگاه معادله (۲-۲۱) بدین شکل خواهد بود

$$Q(\omega) = \beta P(\omega) B_1(\omega) \frac{u'(C_1(\omega))}{u'(C_0)}$$

مسئلهٔ ۲-۶ برای مسئلهٔ مصرف ـ سرمایه‌گذاری با مقرری (۲-۲۷)، نشان دهید که معادله (۲-۱۵) تعمیم می‌یابد به

$$C_0 + E_Q[(C_1 - \hat{E})/B_1] = e$$

مسئلهٔ ۲-۷ در مثال ۲-۱، فرض کنید که ثروت اولیه مقدار $e = 100$ باشد. مجموعهٔ کلیهٔ فرایندهای مصرف C را مشخص کنید که برای آنها استراتژی معاملاتی H وجود داشته باشد که (C, H) پذیرفتنی است.

۲-۴ تحلیل میانگین ـ واریانس پرتفوها

در سرتاسر این بخش فرض بر این است که نرخ بهرهٔ r تعیینی است، فرصت‌های آربیتراژ وجود ندارند، و پرتفویی وجود دارد که $E[R] \neq r$. تحت این شرایط، یکی از مسائل کلاسیک، حل مسئلهٔ میانگین ـ واریانس پرتفوی زیر است:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \operatorname{var}(R) \\ &\text{subject to} && E[R] = \rho \\ & && R \text{ بازده پرتفوی است} \end{aligned} \qquad (۲-۲۸)$$