با حل نمودن برنامهٔ خطی (۱-۲۵) مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی معادل با $V_+(X)$ را به‌دست می‌آوریم؛ که عبارت است از $Y = (۱۵ , ۲۰ , ۳۰)$، که این را می‌توان با بررسی معادلهٔ (۱-۲۱) و اینکه قیمت زمان $t = ۰$ برای Y مساوی $۲۲\frac{۱}{۲}$ است به‌دست آورد. مشابهاً، می‌توان به این رسید که مطالبهٔ مشروط متناظر با $V_-(X)$ عبارت است از $Y = (۱۰ , \frac{۵۰}{۳} , ۳۰)$. ■

مسئلهٔ ۱-۱۴ توضیح دهید که چرا مدل مثال ۱-۴ کامل نیست. مجموعهٔ تمامی مطالبات مشروط دست‌یافتنی را تعیین کنید. $V_+(X)$ و $V_-(X)$ را برای $X = (۱۰ , ۲۰ , ۳۰ , ۴۰)$ حساب کنید.

مسئلهٔ ۱-۱۵ از (۱-۲۳) استفاده کرده تا تحقیق کنید که آیا هیچ مقداری از قیمت توافقی e در مثال ۱-۲ وجود دارد که اختیار خرید به‌ازای آن دست‌یافتنی باشد. مشابهاً، مشخص کنید که چه اختیارهای خریدی دست‌یافتنی هستند. فرض کنید $r = \frac{۱}{۹}$.

مسئلهٔ ۱-۱۶ بلافاصله بعد از برنامهٔ خطی (۱-۲۵) بیان شد که می‌توان بردارهای $Q_j \in \mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$، $j = ۱, \ldots, J$، را مستقل اختیار کرد که به واسطهٔ آن پایه‌ای برای $\mathbb{W}^\perp$ خواهیم داشت، که بنا به فرض از بعد J است. این گفته را به‌وسیلهٔ جبر خطی با دقت تحقیق کنید. بردارهای Q_j را برای مثال ۱-۴ محاسبه کنید.

۱-۶ ریسک و بازده

به‌یاد آوریم که برای یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک Q و برای $\omega \in \Omega$، کسر $Q(\omega)/B_1(\omega)$ را گاهی قیمت وضعیتی متناظر با ω می‌نامیم. به این دلیل، متغیر تصادفی

$$L(\omega) \equiv \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

را **بردار قیمت وضعیت**[1] و یا **چگالی قیمت وضعیت**[2] می‌نامند. نتیجهٔ اصلی که قرار است که در این بخش به اثبات برسد آن است که پاداش ریسک یک پرتفوی دلخواه متناسب است با کواریانس[6] بین بازده چگالی قیمت وضعیت و بازده پرتفوی، نتیجه‌ای که شبیه به یک یافته اساسی از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای است.

با فرض اینکه قیمت $S_n(۰)$ در زمان $t = ۰$ مثبت باشد، بازده[3] R_n برای ورقهٔ ریسکی n را متغیر

1. state price vector 2. state price density 3. return

تصادفی زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_n \equiv \frac{S_n(۱) - S_n(۰)}{S_n(۰)}, \qquad n = ۱, \dots, N$$

مشابهاً، بازده متناظر با حساب بانک توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$R_۰ \equiv \frac{B_۱ - B_۰}{B_۰} = r$$

بازده‌ها برای مقاصد گوناگون مفید هستند، که یکی از موارد استفادهٔ آن‌ها این است که با داشتن بازده‌ها و قیمت‌های زمان $t = ۰$، می‌توانید قیمت‌های زمان $t = ۱$ را حساب کنید. چون قیمت‌ها نامنفی هستند، داریم $R_n \geqslant -۱$ و تساوی تنها و تنها وقتی رخ می‌دهد که $S_n(۱) = ۰$. این را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم تا تحقیق شود که عایدی پرتفوی را می‌توان به‌صورت

$$G = H_۰ B_۰ R_۰ + \sum_{n=۱}^{N} H_n S_n(۰) R_n \tag{۱-۲۹}$$

نوشت. بنابراین، سود سبد ترکیبی وزنی است از بازده‌ها، که هر وزن مقدار پولی است که در ورقهٔ متناظر در زمان $t = ۰$ در ورقه متناظرش سرمایه‌گذاری شده است.

بازده‌ها را همچنین می‌توان برای محاسبهٔ اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک به‌کار برد. به دلیل

$$\begin{aligned} S_n^*(۱) - S_n^*(۰) &= \frac{S_n(۱) - B_۱ S_n(۰)}{B_۱} \\ &= \frac{[۱ + R_n]S_n(۰) - [۱ + R_۰]S_n(۰)}{۱ + R_۰} \\ &= S_n(۰)\left(\frac{R_n - R_۰}{۱ + R_۰}\right) \end{aligned}$$

از (۱-۱۵) نتیجه می‌شود که:

(۱-۳۰) اگر Q، اندازهٔ احتمالی باشد که برای هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $Q(\omega) > ۰$، آنگاه تنها و تنها وقتی Q یک اندازهٔ خنثی نسبت به ریسک است که

$$E_Q\left(\frac{R_n - R_۰}{۱ + R_۰}\right) = ۰, \qquad n = ۱, \dots, N$$

توجه کنیم که زمانی که نرخ سود $R_0 = r$ تعینی است، معادلهٔ (۱-۳۰) به شکل

$$E_Q[R_n] = r. \qquad n = 1, \ldots, N$$

درمی‌آید. این نمونه‌ای است از وضعیت‌های متعددی که در آنها، تحت فرض تعینی بودن نرخ بهره، رابطهٔ جالب و غالباً مفیدی شامل بازده‌ها در دسترس است. بنابراین، این فرض تعینی بودن نرخ بهره را برای تعادل این بخش تحمیل می‌کنیم همچنانکه بر این فرض خواهیم بود که یک اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک Q وجود دارد.

میانگین بازده ورقهٔ n، که به $\bar{R}_n = E[R_n]$ نشان داده می‌شود، غالباً نقش مهمی ایفا می‌کند. برای مثال، به‌سادگی ملاحظه می‌شود

$$\mathrm{cov}(R_n . L) = E[R_n L] - E[R_n]E[L] = E_Q[R_n] - E[R_n] = r - \bar{R}_n$$

به‌عبارت دیگر،

$$\bar{R}_n - r = -\mathrm{cov}(R_n . L). \qquad n = 1 \ldots . N \tag{۱-۳۱}$$

تفاضل $\bar{R}_n - r$ را **صرف ریسک**[1] ورقهٔ بهادار می‌نامیم؛ معمولاً این مقدار مثبت است چرا که سرمایه‌گذاران تأکید دارند که بازده‌های موردانتظار اوراق بهادار بیشتر از بازده بدون ریسک r باشد. پس (۱-۳۱) می‌گوید که صرف ریسک یک ورقهٔ بهادار مرتبط است با همبستگی[۷] بین بازده ورقه و چگالی قیمت وضعیتی.

بازده R از پرتفوی متناظر با یک استراتژی معامله $H = (H_0 . H_1 , \ldots , H_N)$ را درنظر بگیرید. با فرض $V_0 > 0$، داریم

$$R = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

با استفاده از $S_n(1) = S_n(0)[1 + R_n]$ و تعریف V_t به‌دست می‌آوریم

$$R = \frac{H_0}{V_0} r + \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{H_n S_n(0)}{V_0} \right] R_n \tag{۱-۳۲}$$

اگر H_0/V_0 را به‌عنوان کسری از پول که در حساب پس‌انداز سرمایه‌گذاری شده تلقی کنیم (به‌یاد آورید که $B_0 = 1$)، و اگر $H_n S_n(0)/V_0$ را به‌عنوان کسری از پول که در nـامین ورقهٔ بهادار سرمایه‌گذاری

1. risk premium

شده تلقی کنیم، آنگاه (۳۲-۱) می‌گوید که بازده سبد سرمایه‌گذاری ترکیب محدبی از بازده‌های آن اوراق بهادار است. با استفاده از (۳۱-۱)، (۳۲-۱)، و برخی خواص کواریانس، سرراست است که تحقیق شود که

$$\bar{R} - r = -\text{cov}(R, L) \tag{۱-۳۳}$$

که در آن $\bar{R} = E[R]$.

حال دو عدد a و b با $b \neq 0$ متصور شوید که مطالبهٔ مشروط $a + bL$ دست‌یافتنی باشد، یعنی، فرض کنید استراتژی معاملهٔ H' موجود باشد به‌طوری که $V'_1 = a + bL$. چون $V'_0(1 + R') = a + bL$ (در اینجا V' و R' به‌ترتیب بیانگر فرایندهای ارزش و بازده متناظر با H' هستند)، می‌توان با جایگزینی برای L و با استفاده از خواص کواریانس تحقیق کرد که

$$\text{cov}(R, L) = \frac{V'_0}{b}\text{cov}(R, R')$$

(هنوز R متناظر است با یک استراتژی معاملهٔ دلخواه). پس (۳۳-۱) را می‌توان به‌شکل زیر بازنویسی کرد

$$\bar{R} - r = -\frac{V'_0}{b}\ \text{cov}(R, R') \tag{۱-۳۴}$$

به‌ویژه، در حالت خاص $H = H'$، (۳۴-۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\bar{R}' - r = -\frac{V'_0}{b}\text{cov}(R, R') = -\frac{V'_0}{b}\text{var}(R')$$

با استفاده از این و با جایگزینی برای V'_0/b در (۳۴-۱)، که حال با یک استراتژی معاملاتی دلخواه H سروکار داریم، به این می‌رسیم که

(۱-۳۵) فرض کنید که برای ثابت‌های a و b مطالبهٔ مشروط $a + bL$ توسط پرتفویی که دارای بازده R' است تولید شده و فرض کنید که نرخ بازدهٔ r تعینی باشد. فرض کنید R بازده یک پرتفوی دلخواه باشد. آنگاه

$$\bar{R} - r = \frac{\text{cov}(R, R')}{\text{var}(R')}(\bar{R}' - r)$$

کسر $\operatorname{cov}(R, R')/\operatorname{var}(R')$ را بتای[1] استراتژی معاملاتی H نسبت به استراتژی معاملاتی H' می‌نامیم. این نتیجه بیان می‌دارد که صرف ریسک برای H متناسب است با صرف ریسک برای H'، که ثابت تناسب همانا این عدد بتا است. یا از دیدی دیگر، (۳۵-۱) می‌گوید که ریسک متناسب است با بتایش نسبت به یک تبدیل خطی از چگالی قیمت وضعیتی. این نتیجه شبیه به مدل سنتی قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای است، منتها در اینجا H' تنها متناظر است با یک تبدیل خطی از چگالی قیمت وضعیتی به‌جای آنکه متناظر باشد با پرتفوی بازار.

توجه کنید که با یک نرخ بهرهٔ تعینی r و با ثابت‌های دلخواه a و b با $b \neq ۰$ مطالبهٔ مشروط $a + bL$ تنها و تنها وقتی دست‌یافتنی است که چگالی قیمت وضعیتی L دست‌یافتنی باشد. این به آن دلیل درست است که تساوی $H_۰(۱ + r) + \sum H_n S_n(۱) = a + bL$ تنها و تنها وقتی برقرار است که

$$\frac{۱}{b}\left[H_۰ - \frac{a}{۱ + r}\right](۱ + r) + \sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{b} H_n S_n(۱) = L$$

مسئلهٔ ۱۷-۱ معادلهٔ (۲۹-۱) را هم در حالت کلی و هم با به‌کار بردن آن در مثال ۱-۱ تحقیق کنید.

مسئلهٔ ۱۸-۱ با فرض اینکه قیمت زمان $t = ۰$ اکیداً مثبت باشد، بازده تنزیل شده[2] R_n^* برای $n = ۱, \ldots, N$ با $R_n^* \equiv [S_n^*(۱) - S_n^*(۰)]/S_n^*(۰)$ تعریف می‌شود. نشان دهید که

(الف) $G^* = \sum_{n=۱}^{N} H_n S_n^*(۰) R_n^*$

(ب) $R_n^* = \frac{R_n - R_۰}{۱ + R_۰} \qquad n = ۱, \ldots, N$

(ج) اندازهٔ احتمال اکیداً مثبت Q تنها و تنها وقتی یک اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک است که برای $n = ۱, \ldots, N$ داشته باشیم $E_Q[R_n^*] = ۰$.

مسئلهٔ ۱۹-۱ برای پارامتر دلخواه $۰ < p < ۱$ و با فرض $P(\omega_۱) = p$، خواص ریسک و بازده مثال ۱-۱ را بررسی کنید:

(الف) $R_۱$ و $\bar{R}_۱$ چه هستند؟

(ب) L چیست؟

(ج) (۳۱-۱) را برای $n = ۰, ۱$ تحقیق کنید.

از اینجا به بعد فرض کنید $H = (H_۰, H_۱) = (۱, ۳)$.

---

1. beta 2. discounted return

مصرف و سرمایه‌گذاری یک‌دوره‌ای

۲-۱ پرتفوهای بهینه و عملی بودن مدل

این فصل به مسئلهٔ انتخاب بهترین استراتژی معامله به‌منظور تبدیل ثروت سرمایه‌گذاری شده زمان $t = ۰$ به ثروت زمان ۱ =t می‌پردازیم. در شق‌هایی از این مسئله که در بخش‌های بعدی ملاحظه خواهند شد، قسمتی از ثروت در زمان $t = ۰$ مصرف می‌گردد. مسئله آن است که استراتژی معاملاتی بهینه‌ای را محاسبه کنیم، و برای این منظور احتیاج به یک پیمانه اندازه‌گیری عملکرد داریم.

ملاک عملکرد که در اینجا از آن استفاده می‌شود چیزی نیست جز مطلوبیت مورد انتظار. به‌طور مشخص، فرض کنید $u : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که نگاشت $w \to u(w, \omega)$ برای هر $\omega \in \Omega$ مشتق‌پذیر، مقعر، و اکیداً صعودی است. اگر w ارزش پرتفوی در زمان $t = ۱$ بوده و اگر ω وضعیت ممکن باشد، آنگاه $u(w, \omega)$ **مطلوبیت**[1] مقدار w را نمایش می‌دهد. بنابراین پیمانهٔ عملکرد عبارت خواهد بود از مطلوبیت مورد انتظار از ثروت پایانی، یعنی،

$$Eu(V_۱) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u(V_۱(\omega), \omega)$$

توجه کنید که تابع مطلوبیت u می‌تواند صریحاً به هر دوی ثروت نهایی w و وضعیت ω وابسته باشد. با این حال، در بسیاری کاربردها کفایت می‌کند که u تنها به ثروت وابسته باشد، که در این صورت u تابعی مقعر و اکیداً صعودی از یک آرگومان تنها است.

$\mathbb{H}$ را مجموعهٔ کلیهٔ استراتژی‌های معامله بگیرید، یعنی، $\mathbb{H} = \mathbb{R}^{N+۱}$، فضای خطی کلیهٔ بردارهای به شکل $(H_۰, H_۱, \cdots, H_N)$. فرض کنید عدد مشخص $v \in \mathbb{R}$ معرف ثروت اولیه در زمان $t = ۰$ باشد. علاقه‌مند به مسئله پرتفوی بهینه زیر هستیم:

$$\begin{aligned} &\underset{H \in \mathbb{H}}{\text{maximize}} \quad Eu(V_۱) \\ &\text{subject to} \quad V_۰ = v \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

با توجه به $V_۱^* = V_۰^* + G^*$ و $V_۱ = B_۱ V_۱^*$، این مسئله همانند مسئله

$$\text{maximize } E[u(B_۱\{v + H_۱ \Delta S_۱^* + \cdots + H_N \Delta S_N^*\})] \tag{۲-۲}$$

است. توجه کنید که اگر فرصت آربیتراژ وجود داشته باشد، آنگاه جوابی برای (۱-۲) وجود ندارد. به عبارت دیگر، اگر $\hat{H}$ جوابی بوده و اگر H یک فرصت آربیتراژ باشد، آنگاه با قرار دادن $\tilde{H} = \hat{H} + H$

1. utility

داریم

$$v + \sum_{n=1}^{N} \tilde{H}_n \Delta S_n^* = v + \sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n \Delta S_n^* + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^* \geqslant v + \sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n \Delta S_n^*$$

که در آن نامساوی به دلیل آربیتراژ بودن H رخ می‌دهد. در واقع، این نامساوی برای حداقل یک $\omega \in \Omega$ اکید است. از آنجایی که u نسبت به ثروت تابعی اکیداً صعودی است و چون برای هر $\omega \in \Omega$ داریم $P(\omega) > 0$، این به آن معنی است که تابع هدف (۲-۲) برای $\tilde{H}$ اکیداً بزرگتر از مقدار آن در $\hat{H}$ است. این متناقض است با اینکه $\hat{H}$ جوابی بهینه برای (۲-۲) است، که در این صورت موضوع زیر برقرار است:

(۲-۳) اگر جوابی بهینه برای مسئلهٔ پرتفوی (۱-۲) یا (۲-۲) وجود داشته باشد، آنگاه فرصتی برای آربیتراژ وجود نخواهد داشت.

به‌عبارت دیگر، (۳-۲) می‌گوید که اگر جوابی بهینه برای (۱-۲) یا (۲-۲) وجود داشته باشد، آنگاه اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک وجود دارد. از نتیجه‌ای دیگر که قدری تعجب‌برانگیز است، رابطه‌ای صریح بین هر چنین جواب و اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک به‌دست می‌آید. این رابطه را می‌توان از شرایط لازم مرتبهٔ اول برای بهینگی به‌دست آورد. برای به‌دست آوردن آن، تابع هدف (۲-۲) را بدین صورت بنویسید

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u(B_1(\omega)\{v + H_1 \Delta S_1^*(\omega) + \cdots + H_N \Delta S_N^*(\omega)\}, \omega)$$

سپس شرط لازم مرتبهٔ اول بدین شکل بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E[u(B_1\{v + H_1 \Delta S_1^* + \cdots + H_N \Delta S_N^*\})]}{\partial H_n} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u'(B_1(\omega)\{v + H_1 \Delta S_1^*(\omega) + \cdots \\ &\quad + H_N \Delta S_N^*(\omega)\}, \omega) B_1(\omega) \Delta S_n^*(\omega) \\ &= E[B_1 u'(V_1) \Delta S_n^*], \qquad n = 1, \ldots, N \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۴)$$

که در آن u' معرف مشتق جزئی u نسبت به آرگومان اول می‌باشد. پس اگر (H, V) جوابی از (۲-۲) باشد، آنگاه باید در این دستگاه از N معادله صدق کند. اما شرطی را که یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک باید در آن صدق کند به یاد آورید:

$$0 = E_Q[\Delta S_n^*] = \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) \Delta S_n^*(\omega), \qquad n = 1, \ldots, N \tag{۲-۵}$$

با مقایسهٔ (۲-۴) و (۲-۵) روشن می‌شود که با قرار دادن $Q(\omega) = P(\omega) B_1(\omega) u'(V_1(\omega), \omega)$ مقداری را به‌دست آورده‌ایم که در (۲-۵) صدق می‌کند. توجه کنید که برای هر ω داریم $Q(\omega) > 0$ چرا که u اکیداً صعودی است. با این حال، مقدار $Q(\omega_1) + \cdots + Q(\omega_K)$ ضرورتاً مساوی ۱ نیست، پس Q تنها با احتساب یک ثابت یک اندازه احتمال است. به راحتی می‌توان این ثابت را به‌دست آورد، لذا مورد زیر را داریم:

(۲-۶) اگر (H, V) جوابی برای مسئلهٔ پرتفوی بهینه (۲-۱) یا (۲-۲) باشد، آنگاه رابطه

$$Q(\omega) \equiv \frac{P(\omega) B_1(\omega) u'(V_1(\omega), \omega)}{E[B_1 u'(V_1)]}, \qquad \omega \in \Omega$$

یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک معرفی می‌کند.

با کمی بازنویسی (۲-۶) در حالتی که $B_1 = 1 + r$ ثابت است، می‌رسیم به

$$L(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{u'(V_1(\omega), \omega)}{E[u'(V_1)]}$$

به عبارت دیگر، زمانی که نرخ بهره تعینی است، **چگالی قیمت وضعیت**[1] متناسب است با **مطلوبیت نهایی ثروت پایانی**.[2]

در مورد عکس این موضوع چطور؟ آیا اگر یک اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک Q وجود داشته باشد، آیا آنگاه مسئلهٔ پرتفوی بهینه (۲-۱) دارای جواب است؟ نه ضرورتاً، چرا که برای بعضی از مقادیر u و v ممکن است که جواب H وجود نداشته باشد. با این حال، همواره می‌توان u و v را چنان یافت که برای آنها چنین جواب H موجود باشد. برای فرمول‌بندی این ایده، در صورتی یک مدل را عملی[3] می‌خوانیم که تابع $u : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ و ثروت ابتدایی v وجود داشته باشد به‌نحوی که تابع

1. state price density 2. marginal utility of terminal wealth 3. viable

$u(w, \omega)$ $w \to$ برای هر $\omega \in \Omega$ مقعر و اکیداً صعودی بوده و مسئلهٔ پرتفوی بهینه (۱-۲) دارای یک جواب بهینه H باشد.

(۲-۷) مدل بازار اوراق بهادار تنها و تنها وقتی عملی است که یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک موجود باشد.

در معیت (۶-۲)، برای تحقیق این اصل کافی است وجود یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک را فرض بگیرید، u و v را هوشمندانه اختیار کنید، و سپس وجود جوابی برای (۲-۲) را نشان دهید. انتخاب u عبارت است از

$$u(w, \omega) = w\frac{Q(\omega)}{P(\omega)B_1(\omega)}$$

در حالی که v دلخواه خواهد بود. حال برای $(H_1, \dots, H_N)$ دلخواه داریم

$$\begin{aligned}
&E[u(B_1\{v + H_1\Delta S_1^* + \cdots + H_N\Delta S_N^*\}, \omega)] \\
&\qquad = \sum P(\omega)B_1(\omega)\{v + H_1\Delta S_1^* + \cdots \\
&\qquad + H_N\Delta S_N^*\}Q(\omega)/[P(\omega)B_1(\omega)] \\
&\qquad = \sum Q(\omega)\{v + H_1\Delta S_1^* + \cdots + H_N\Delta S_N^*\} \\
&\qquad = v + H_1E_Q[\Delta S_1^*] + \cdots + H_NE_Q[\Delta S_N^*] = v
\end{aligned}$$

بنابراین تمامی بردارهای $(H_1, \dots, H_N)$ منجر به مقدار یکسان برای تابع هدف در (۲-۲) می‌شوند. معادلاً، هر استراتژی معامله با ثروت ابتدایی v منجر به همان مقدار تابع هدف در (۱-۲) می‌شود، یعنی تمامی چنین استراتژی‌های معامله بهینه هستند. لذا با انتخاب هوشمندانه‌ای از تابع مطلوبیت نتیجهٔ (۷-۲) برقرار است.

مسئلهٔ پرتفوی بهینه (۱-۲) یا (۲-۲) یک مسئلهٔ بهینه‌سازی محدب استاندارد است، لذا می‌توان از روش‌های استاندارد برای محاسبهٔ جواب استفاده کرد. یک رهیافت آن است که با معادلات شرایط لازم (۴-۲) که دستگاهی از N معادله و N مجهول است کار کنیم. متأسفانه آن چنانکه در مثال بعدی می‌بینیم، این معادلات می‌توانند نسبت به H غیرخطی باشند که این باعث پیچیدگی حل می‌شود.

مثال ۱-۲ فرض کنیم ۲ $= N$، $K = ۳$، $r = \frac{۱}{۹}$، و فرض کنیم که فرایند قیمت تنزیل شده به شرح زیر باشد:

n	$S_n^*(۰)$	$S_n^*(۱)$		
		$\omega_۱$	$\omega_۲$	$\omega_۳$
۱	۶	۶	۸	۴
۲	۱۰	۱۳	۹	۸

توجه کنید که اندازهٔ احتمال منحصربه‌فردی وجود دارد، چراکه $Q = (\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$ جواب منحصربه‌فرد دستگاه معادلات زیر است:

$$۶ = ۶Q(\omega_۱) + ۸Q(\omega_۲) + ۴Q(\omega_۳)$$
$$۱۰ = ۱۳Q(\omega_۱) + ۹Q(\omega_۲) + ۸Q(\omega_۳)$$
$$۱ = Q(\omega_۱) + Q(\omega_۲) + Q(\omega_۳)$$

با تابع مطلوبیت $u(w) = -\exp\{-w\}$، تابع مطلوبیت نهایی عبارت است از $u'(w) = \exp\{-w\}$. پس شرایط لازم (۲-۴) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} ۰ =& P(\omega_۱)\exp\left\{-\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(v + ۰H_۱ + ۳H_۲)\right\}\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(۰) \\ &+ P(\omega_۲)\exp\left\{-\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(v + ۲H_۱ - H_۲)\right\}\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(۲) \\ &+ P(\omega_۳)\exp\left\{-\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(v - ۲H_۱ - ۲H_۲)\right\}\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(-۲) \\ ۰ =& P(\omega_۱)\exp\left\{-\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(v + ۰H_۱ + ۳H_۲)\right\}\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(۳) \\ &+ P(\omega_۲)\exp\left\{-\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(v + ۲H_۱ - H_۲)\right\}\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(-۱) \\ &+ P(\omega_۳)\exp\left\{-\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(v - ۲H_۱ - ۲H_۲)\right\}\left(\frac{۱۰}{۹}\right)(-۲) \end{aligned}$$

نیاز به توضیح نیست که اینها را نمی‌توان به‌راحتی برای $H_۱$ و $H_۲$ حل کرد. ■

مسئلهٔ ۱-۲ فرض کنید $N = 1$، $K = 2$، $S_0 = 5$، $S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}$، و $S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$.
معادلات (۱-۲) را برای $r = \frac{1}{9}$ و پارامترهای عددی دلخواه ثروت ابتدایی $v \geqslant 0$ و احتمال $P(\omega_1) = p$ تحت توابع مطلوبیت زیر حل کنید:

(الف) $u(w) = \ln w$،

(ب) $u(w) = -\exp(-w)$،

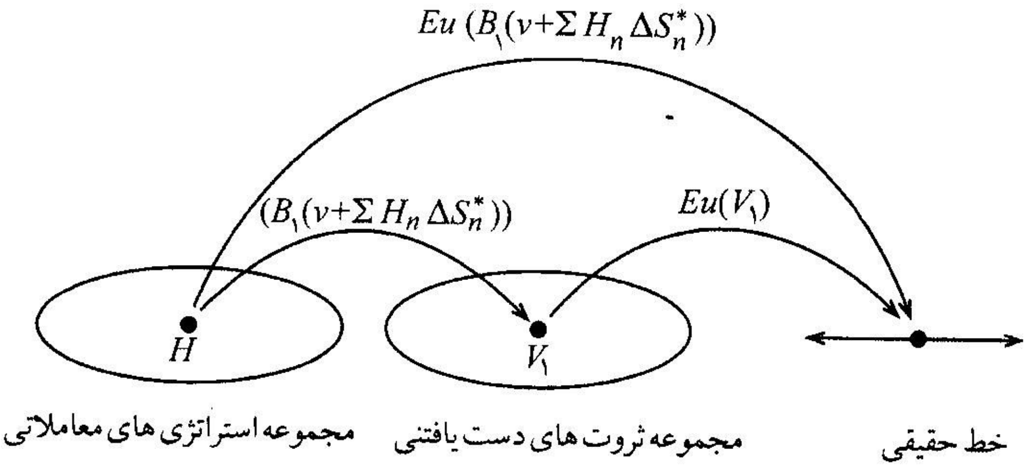
(ج) $u(w) = \gamma^{-1} w^{\gamma}$، که در آن $-\infty < \gamma < 1$, $\gamma \neq 0$.

۲-۲ رهیافت محاسباتی ریسک خنثایی

چنانکه در مثال ۱-۲ ملاحظه شد، حل مسئلهٔ پرتفوی بهینه (۱-۲) می‌تواند از لحاظ محاسباتی پیچیده باشد. خوشبختانه، روش جایگزینی که از اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک استفاده می‌کند وجود دارد که کاراتر است. ایدهٔ آن مبتنی است بر این مشاهده که تابع هدف $H \to Eu(V_1)$ در (۱-۲) را می‌توان آن چنانکه در شکل ۱-۲ ملاحظه می‌شود به‌صورت ترکیب دو تابع نوشت. تابع اول $H \to V_1$ استراتژی‌های معاملاتی را به متغیرهای تصادفی می‌فرستد که بیانگر ارزش زمان $t = 1$ از پرتفوی می‌باشند. تابع دوم $V_1 \to Eu(V_1)$ متغیرهای تصادفی را به اعدادی در خط حقیقی می‌فرستد. متناظر با این ترکیب، روش محاسباتی ریسک خنثایی دارای دو مرحله است. ابتدا متغیر تصادفی بهینه V_1 را شناسایی می‌کنیم، یعنی مقدار V_1 را از بین متغیرهای تصادفی قابل‌قبول انتخاب می‌کنیم که $Eu(V_1)$ را بیشینه می‌کند. سپس به محاسبهٔ استراتژی معاملاتی H می‌پردازیم که V_1 را تولید می‌کند، یعنی استراتژی معاملاتی را می‌یابیم که مطالبه مشروط V_1 را بازسازی می‌کند.

مرحلهٔ ۲ ساده است. این مرحله دقیقاً همان است که در بخش ۱-۴ برای محاسبهٔ استراتژی معاملاتی سازنده یک مطالبهٔ مشروط قابل‌دسترسی بحث شد. اگر زیرمجموعهٔ قابل‌قبول از متغیرهای تصادفی مرحلهٔ ۱ را به‌درستی انتخاب کرده باشیم، آنگاه استراتژی معاملاتی سازنده V_1 متناظر است با پرتفویی که ارزش آن در زمان $t = 0$ مساوی v است. به‌عبارت دیگر، مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی V_1 دارای قیمتی مساوی v در زمان $t = 0$ است، که این ارزش اولیه پرتفوی مفروض بوده است.

مرحلهٔ ۱ به تلاش بیشتری نیاز دارد، اما تنها از نظریهٔ بهینه‌سازی سرراستی استفاده می‌کند. راه موفقیت در آن مشخص کردن صحیح و مناسب مجموعه متغیرهای تصادفی قابل‌قبول است. اگر مدل کامل



شکل ۱-۲ روش محاسباتی ریسک خنثایی.

باشد، این مجموعه عبارت است از

$$\mathbb{W}_v \equiv \{W \in \mathbb{R}^K : \quad E_Q[W/B_1] = v\} \qquad (۲-۸)$$

(تعریف $\mathbb{W}_v$ برای مدل‌های ناقص پیچیده‌تر است و آن را بعداً به بحث می‌گذاریم). برای ملاحظهٔ این تساوی، توجه کنیم که تحت هر استراتژی معاملاتی H صادق در $V_0 = v$، از اصل ارزش‌گذاری ریسک خنثایی داریم $E_Q[V_1/B_1] = v$. به‌عکس، مجدداً از اصل ارزش‌گذاری ریسک خنثایی، برای هر مطالبهٔ مشروط $W \in \mathbb{W}_v$ استراتژی معاملاتی H یافت می‌شود که $V_0 = v$ و $V_1 = W$. در زبان مسائل پرتفوی بهینه، مجموعهٔ $\mathbb{W}_v$ را (که عملاً یک زیرفضای آفینی است) **مجموعه ثروت‌های دست‌یافتنی**[1] می‌نامند.

اولین مرحله روش محاسباتی ریسک خنثایی عبارت است از حل زیر مسئلهٔ:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad Eu(W) \\ &\text{subject to} \quad W \in \mathbb{W}_v \end{aligned} \qquad (۲-۹)$$

در حالت مدل کامل است، این مسئله را می‌توان به‌راحتی با ضرایب لاگرانژ حل کرد. در معیت (۸-۲)، مسئلهٔ (۹-۲) معادل است با

$$\text{maximize} \quad Eu(W) - \lambda E_Q[W/B_1] \qquad (۲-۱۰)$$

1. set of attainable wealths

که ضریب لاگرانژ λ به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که جواب (۱۰-۲) در رابطهٔ زیر صدق کند

$$E_Q[W/B_1] = v \tag{۲-۱۱}$$

با آوردن چگالی قیمت وضعیتی $L = Q/P$، تابع هدف (۱۰-۲) را می‌توان بدین صورت نوشت

$$\begin{aligned} Eu(W) - \lambda E[LW/B_1] &= E[u(W) - \lambda LW/B_1] \\ &= \sum_{\omega} P(\omega)[u(W(\omega)) - \lambda L(\omega)W(\omega)/B_1(\omega)] \end{aligned}$$

اگر W این عبارت را بیشینه کند، آنگاه شرایط لازم بهینگی منجر می‌شوند به یک معادله برای هر $\omega \in \Omega$:

$$u'(W(\omega)) = \lambda L(\omega)/B_1(\omega), \qquad \omega \in \Omega$$

توجه کنید که این معادله دقیقاً همانند آن است که در (۶-۲) آمد؛ در واقع به دلیل $W = V_1$، می‌توان نتیجه گرفت که λ مساوی $E[B_1 u'(W)]$ است، که در آن W جواب بهینه است. برای محاسبهٔ W معادلهٔ قبلی به نمایش گذاشته شده را برای W حل می‌کنیم تا به‌دست آید:

$$W(\omega) = I[\lambda L(\omega)/B_1(\omega)] \tag{۲-۱۲}$$

که در آن I تابع وارون[1] متناظر با u' است.

پس (۱۲-۲) جواب بهینه برای (۹-۲) را زمانی که λ مقدار درست را اتخاذ کند به‌دست می‌دهد. اما مقدار درست λ چیست؟ در واقع مقداری است که (۱۱-۲) برقرار می‌شود زمانی که از (۱۲-۲) به‌جای W مقدار مساوی‌اش را جایگذاری کنیم، یعنی

$$E_Q[I(\lambda L/B_1)/B_1] = v \tag{۲-۱۳}$$

تابع وارون I نزولی است، و برد آن معمولاً شامل $(0, \infty)$ است، لذا معمولاً برای هر $v > 0$ یک جواب λ برای (۱۱-۲) وجود دارد.

مثال ۲-۲ فرض کنید $u(w) = -\exp(-w)$، پس $u'(w) = \exp(-w)$. سپس $u'(w) = i$ اگر و تنها اگر $w = -\ln(i)$، پس $I(i) = -\ln(i)$. پس جواب بهینه برای (۹-۲) به شکل زیر است

$$W = -\ln(\lambda L/B_1) = -\ln(\lambda) - \ln(L/B_1)$$

1. inverse function

و (۲-۱۳) تبدیل می‌شود به

$$v = -E_Q[B_1^{-1}\ln(\lambda L/B_1)] = -\ln(\lambda)E_Q B_1^{-1} - E_Q[\ln(L/B_1)/B_1]$$

پس مقدار درست λ توسط رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\lambda = \exp\left\{\frac{-v - E_Q[B_1^{-1}\ln(L/B_1)]}{E_Q B_1^{-1}}\right\}$$

پس

$$W = \frac{v + E_Q[B_1^{-1}\ln(L/B_1)]}{E_Q B_1^{-1}} - \ln(L/B_1)$$

با جایگزینی این عبارت در $-\exp(-W)$ به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} u(W) &= -\exp\left\{\frac{-v + \ln(L/B_1)E_Q B_1^{-1} - E_Q[B_1^{-1}\ln(L/B_1)]}{E_Q B_1^{-1}}\right\} \\ &= -\lambda L/B_1 \end{aligned}$$

لذا جواب بهینه تابع هدف (۲-۹) عبارت است از

$$Eu(W) = -\lambda E[L/B_1] = -\lambda E_Q B_1^{-1}$$

■

این مثال الگویی کلی را توضیح می‌دهد: فرمول‌های کلی که برای ثروت بهینه W و امثالهم به‌دست می‌آیند تنها از طریق اندازه‌های احتمال P و Q به مدل بازار اوراق بهادار وابسته است. به‌عبارت دیگر، P و Q تشکیل یک آماره بسنده برای زیرمسئلهٔ پرتفوی بهینه (۲-۹) می‌دهند. بعد از به‌دست آوردن فرمول‌هایی شبیه آنچه در مثال ۲-۲ برای یک تابع مطلوبیت خاص به‌دست آمد، می‌توان به‌سرعت به تحلیل هر بازار کامل از اوراق بهادار پرداخت که دارای آن تابع مطلوبیت باشد.

مثال‌های ۱-۲ و ۲-۲ (ادامه) فرض کنید $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$ و $P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{4}$. پس چگالی قیمت وضعیتی L توسط $L(\omega_1) = \frac{2}{3}$ و $L(\omega_2) = L(\omega_3) = \frac{4}{3}$ داده می‌شود. با فرض $r = \frac{1}{9}$ و $B_1 = \frac{10}{9}$ محاسبه می‌کنیم

$$E_Q[\ln(L/B_1)] = \left(\frac{1}{3}\right)\left[\ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}\right) + 2\ln\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{10}\right)\right] = -0{,}04873$$

پس ثروت دست‌یافتنی بهینه عبارت است از

$$W = v(1+r) + E_Q[\ln(L/B_1)] - \ln(L/B_1)$$

$$= \begin{cases} v(\frac{10}{9}) + 0/46209, & \omega = \omega_1 \\ v(\frac{10}{9}) - 0/23105, & \omega = \omega_2, \omega_3 \end{cases}$$

توجه‌کنیدکه رابطه مطلوب $E_Q[W/B_1] = v$ برقراراست. حال $\lambda = \exp\{-(\frac{10}{9})v + 0/04873\}$،
پس مقدار بهینهٔ تابع هدف عبارت است از

$$Eu(W) = -\lambda E_Q B_1^{-1} = -\frac{9}{10}\lambda$$

توجه کنید که، در هماهنگی با (۶-۲) داریم $\lambda = E[B_1 u'(V_1)]$. به‌علاوه، اکنون با داشتن ثروت دست‌یافتنی بهینه W محاسبه شده است، به‌سادگی می‌توانیم استراتژی معاملاتی بهینهٔ H را با حل کردن $W/B_1 = v + G^*$ به‌دست آوریم. در وضعیت ω_1، ثروت نهایی تنزیل شده $W(\omega_1)/B_1$ برابر است با $v + (\frac{9}{10})(0/46209) = v + 0/41588$، حال آنکه ثروت ابتدایی به‌علاوهٔ سود تنزیل یافته $v + G^*(\omega_1)$ مساوی است با $v + H_1(6-6) + H_2(13-10) = v + 3H_2$. مشابهاً، برای وضعیت‌های ω_2 و ω_3 معادلاتی به‌دست می‌آیند که سه معادلهٔ زیر نتیجه آن‌ها است:

$$\omega_1 : 0/41590 = 0H_1 + 3H_2$$

$$\omega_2 : -0/20795 = 2H_1 - H_2$$

$$\omega_3 : -0/20795 = -2H_1 - 2H_2$$

این معادلات وابسته هستند و جواب منحصر به‌فردی برای آن‌ها موجود است که عبارت است از $H_1 = -0/03466$ و $H_2 = 0/13863$. با حل کردن $v = V_0 = H_0 + 6H_1 + 10H_2$ برای H_0 به‌دست می‌آید $H_0 = v - 1/17834$. بالاخره توجه کنید که، چنانکه مطلوب است، این استراتژی معاملاتی در شرایط لازم (۴-۲) صدق می‌کند (مثال ۱-۲ را در بالا ملاحظه کنید).

مسئلهٔ ۲-۲ (مطلوبیت لگاریتمی) فرض کنید $u(w) = \ln(w)$. نشان دهید که تابع وارون $I(i) = i^{-1}$، ضریب لاگرانژ $\lambda = v^{-1}$، ثروت دست‌یافتنی بهینهٔ $W = vL^{-1}B_1$، و مقدار بهینهٔ

تابع هدف $\ln(v) - E[\ln(L/B_1)]$، می‌باشد. این عبارت‌ها را در حالت $N = 1$، $K = 2$، $r = \frac{1}{9}$، $S_0 = 5$، $S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}$، $S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$، و $P(\omega_1) = \frac{3}{5}$، حساب کرده و استراتژی معاملاتی بهینه را به‌دست آورید.

مسئلهٔ ۳-۲ (تابع مطلوبیت کشش همسان) فرض کنید $u(w) = \gamma^{-1}w^{\gamma}$، که در آن $-\infty < \gamma < 1$ و $\gamma \neq 0$. نشان دهید که تابع وارون $I(i) = i^{-1/(1-\gamma)}$، ضریب لاگرانژ

$$\lambda = v^{-(1-\gamma)}\{E[(L/B_1)^{-\gamma/(1-\gamma)}]\}^{(1-\gamma)}$$

مقدار بهینه ثروت دست‌یافتنی

$$W = \frac{v(L/B_1)^{-1/(1-\gamma)}}{E[(L/B_1)^{-\gamma/(1-\gamma)}]}$$

و مقدار بهینه تابع هدف $E[u(W)] = \lambda v/\gamma$، می‌باشد. این عبارت‌ها را تحت مدل مسئلهٔ ۲-۲ محاسبه کرده و استراتژی معاملاتی بهینه را به‌دست آورید.

۳-۲ مسائل مصرف ـ سرمایه‌گذاری

یک فرایند مصرف[1] $C = (C_0, C_1)$ تشکیل یافته است از یک عدد نامنفی C_0 و یک متغیر تصادفی نامنفی C_1. یک برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری[2] متشکل است از یک زوج (C, H)، که در آن C یک فرایند مصرف است و H یک استراتژی معاملاتی است. یک برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری را در صورتی پذیرفتنی[3] خوانیم که اولاً $C_0 + V_0 = v$ (مقدار پولی که در زمان $t = 0$ فراهم است) و در ثانی $C_1 = V_1$. همواره فرض می‌کنیم $v \geqslant 0$.

مقدار C_t را باید به‌عنوان مقداری که توسط سرمایه‌گذار در زمان t مصرف می‌شود پنداشت. چون C_0 مصرف در زمان صفر و چون $V_0 = H_0 + \sum H_n S_n(0)$ مقدار سرمایه‌گذاری شده در آن زمان است، مقدار پول v مهیا در زمان صفر باید حداقل مساوی $C_0 + V_0$ باشد. چون $V_1 = H_0 B_1 + \sum H_n S_n(1)$ مقدار پول فراهم در زمان $t = 1$ است، باید داشته باشیم $C_1 \leqslant V_1$. حال یک سرمایه‌گذار آگاه که تنها می‌تواند در زمان‌های $t = 0$ و $t = 1$ مصرف کند پولی را در هیچ یک از این دو زمان بدون استفاده نخواهد گذاشت، بنابراین این سرمایه‌گذار احتمالاً برنامه مصرف ـ سرمایه‌گذاری‌ای را که پذیرفتنی نباشد اتخاذ نخواهد کرد.

---

1. consumption process 2. consumption-investment plan 3. admissible