$Ax\cos(\ln x)+Bx\sin(\ln x)$

5) $x=e^z \quad y''+y'+6y=0 \Rightarrow r^2+r+6=0,\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-24}}{2}=\dfrac{-1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{23}}{2}i, \quad y_h=C_1e^{\frac{-1}{2}z}\sin(\dfrac{\sqrt{23}}{2}z)+C_2e^{\frac{-1}{2}z}\cos(\dfrac{\sqrt{23}}{2}z)$

$y_h=C_1x^{\frac{-1}{2}}\sin(\dfrac{\sqrt{23}}{2}(\ln x))+C_2x^{\frac{-1}{2}}\cos(\dfrac{\sqrt{23}}{2}(\ln x)$

==================================================

$x^2y''+2xy'+6y=0 \Rightarrow r(r-1)+2r+6=0$

9) $x^3y'''-3x^2y''+3xy'-3y=0 \Rightarrow x=e^z, \quad r(r-1)(r-2)-3r(r-1)+3r-3=0 \Rightarrow (r-1)[r(r-2)-3r+3]=0 \Rightarrow (r-1)(r^2-5r+3)=0$

$r=1,\ r=\dfrac{5\pm\sqrt{25-12}}{2},\ \dfrac{5+\sqrt{13}}{2},\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

$$y_1=\sin(x^2),\quad xy''-y'+4x^3y=0,\quad y''-\frac{1}{x}y'+4x^2y=0,\quad y=y_1v,\quad v=\int u\,dx,\qquad u'+\left(\frac{2(2x)\cos(x^2)}{\sin(x^2)}-\frac{1}{x}\right)u=0$$

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{-2(2x)\cos(x^2)}{\sin(x^2)}+\frac{1}{x}\right)u,\quad \frac{du}{u}=\left(\frac{-2(2x)\cos(x^2)}{\sin(x^2)}+\frac{1}{x}\right)dx\Rightarrow \ln u=-2\ln(\sin(x^2))+\ln x\Rightarrow \ln u=-\ln(\sin(x^2))^2+\ln x$$

$$\Rightarrow \ln u=\ln\frac{x}{(\sin(x^2))^2}\Rightarrow u=\frac{x}{(\sin(x^2))^2},\qquad v=\int\frac{x}{(\sin(x^2))^2}dx, t=x^2, dt=2x\,dx\Rightarrow v=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin^2 t}dt=\frac{1}{2}(-\cot x^2)$$

$$y=\frac{1}{2}(-\cot x^2)\sin(x^2)=-\frac{1}{2}\cos x^2\Rightarrow y_h=C_1\sin(x^2)+C_2\cos(x^2)$$

$$y''-3y'+2y=e^{2x},\quad y_1=e^x,\quad y=y_1v,\quad v=\int u\,dx,\qquad u'+\left(\frac{2e^x}{e^x}-3\right)u=\frac{e^{2x}}{e^x}\Rightarrow u'-u=e^x,\quad \mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x}$$

$$u=\frac{1}{e^{-x}}\left[\int dx+c\right]=e^x(x+c),\qquad v=\int e^x(x+c)dx=\int xe^x dx+\int ce^x dx=xe^x-e^x+ce^x+c_2=xe^x+c_1e^x+c_2$$

$$y=y_1v=e^x(xe^x+c_1e^x+c_2)=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^{2x}=y_h+y_p$$

### ۳-۴- معادله کوشی-اویلر همگن

یکی از معادلات خطی با ضرایب متغیر که به کمک تغییر متغیر قابل تبدیل به معادله با ضرایب ثابت است معادله کوشی- اویلر می‌باشد صورت کلی این معادله به صورت

$$x^n y^n + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0, \qquad a_i \in R$$

یا (*)

$$(ax+b)^n y^n + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = 0$$

می باشد که به ترتیب با تغییر متغیرهای $(z=\ln(x))\, x=e^z$ و $(z=\ln(ax+b))\, ax+b=e^z$ تبدیل به معادله خطی مرتبه n با ضرایب ثابت می‌شوند.

(تبدیل معادله کوشی- اویلر مرتبه دوم به یک معادله خطی با ضرایب ثابت:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad x = e^z$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = e^{-z}\dfrac{dy}{dz} \\ y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{dy}{dx}\right).\dfrac{dz}{dx} = e^{-z}\left(-e^{-z}\dfrac{dy}{dz} + e^{-z}\dfrac{d^2y}{dz^2}\right) = e^{-2z}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right) \end{cases}$$

جایگذاری در معادله کوشی- اویلر $\Rightarrow\ e^{2z}(e^{-2z}(y''-y')) + \alpha e^z(e^{-z}y') + \beta y = 0 \ \Rightarrow\ y'' + (\alpha-1)y' + \beta y = 0$

معادله با ضرایب ثابت و همواره قابل حل که متغیر مستقل آن $z$ است و با جایگذاری $z=\ln x$ جواب معادله کوشی حاصل می شود.)

به خاطر سپردن معادله $y'' + (\alpha-1)y' + \beta y = 0$ جهت سرعت در حل معادلات مرتبه دوم کوشی – اویلر توصیه می شود.

با تغییر متغیر $ax+b=e^z$ معادله کوشی- اویلر $(ax+b)^2 y'' + \alpha(ax+b)y' + \beta y = 0$ به معادله با ضرایب ثابت $y'' + \left(\dfrac{\alpha}{a}-1\right)y' + \dfrac{\beta}{a^2}y = 0$ تبدیل می شود.

در حالت کلی معادله مشخصه (*) عبارت است از : $\underbrace{r(r-1)\cdots(r-n+1)}_{n\ \text{تا}} + a_{n-1}\underbrace{r(r-1)\cdots(r-n+2)}_{(n-1)\ \text{تا}} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$

### ۳-۵- روش کاهش مرتبه

در این روش یک جواب معادله همگن را می دانیم و یا می توانیم به راحتی حدس بزنیم . اگر $y_1$ یک جواب معادله همگن متناظر با معادله خطی $L(y)=b(x)$ باشد $(L(y_1)=0)$ با تغییر متغیر $y=y_1v$ به یک معادله خطی برحسب $v$ می‌رسیم که فاقد خود تابع $v$ است و لذا با تغییر متغیر $u=v'$ به معادله خطی می‌رسیم که مرتبه آن یک واحد کاه ش یافته است. بنابراین اگر یک جواب معادله خطی مرتبه ۲ را بدانیم به کمک روش کاهش مرتبه آن را به معادله مرتبه ۱ تبدیل و جواب دیگر آن را به دست می‌آوریم.

(چگونگی انجام این روند:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=b(x),\qquad y=vy_1,\ \ y'=v'y_1+vy_1',\quad ,y''=v''y_1+2v'y_1'+vy_1''$$

جایگذاری در معادله:

$$v''y_1+2v'y_1'+vy_1''+p(x)(v'y_1+vy_1')+q(x)vy_1=b(x)$$
$$\Rightarrow y_1v''+2y_1'v'+p(x)y_1v'+v(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)=b(x)$$
$$\Rightarrow v''+(\frac{2y_1'}{y_1}+p(x))v'=\frac{b(x)}{y_1}\ \ \overset{v'=u}{\Rightarrow}\ \ u'+(\frac{2y_1'}{y_1}+p(x))u=\frac{b(x)}{y_1}\ )$$

**جمع‌بندی:**

**الف)** اگر یک جواب معادله خطی مرتبه ۲ همگن مانند $y_1$ را داشته باشیم جواب دوم آن عبارت است از $y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$ و جواب عمومی به شکل $y=c_1y_1+c_2y_2$ خواهد بود. (این حالت کاربردی‌تر است)

**ب)** اگر $y_1$ یک جواب معادله همگن متناظر با معادله ناهمگن $L(y)=b(x)$ باشد جواب دیگر معادله ناهمگن به شکل $y_2=vy_1$ خواهد بود که $v=\int udx$ و $u$ از حل معادله مرتبه اول $u'+(\frac{2y_1'}{y_1}+p(x))u=\frac{b(x)}{y_1}$ بدست می‌آید.

گاهی اوقات در مسائل جواب اول داده نمی شود ولی برای حدس یک جواب معادله خطی همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ از ۲ حالت زیر می‌توان بهره جست:

**۱)** اگر $p(x)=-xq(x)$ باشد، آنگاه $y_1=x$

**۲)** اگر یک عدد حقیقی مانند $a$ به گونه‌ای یافت شود که $a^2+ap(x)+q(x)=0$، آنگاه $y_1=e^{ax}$.

پس به عنوان حالت خاص اگر مجموع ضرایب معادله دیفرانسیل خطی صفر شود یعنی $1+p(x)+q(x)=0$ $(a=1)$ آنگاه $y_1=e^x$ و همچنین اگر $1-p(x)+q(x)=0$ شود $(a=-1)$ آنگاه $y_1=e^{-x}$.