۳-۳- معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت

اگر ضرایب معادله خطی اعداد ثابتی باشند $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$ $(a_i \in R, i=0,1,...,n-1)$، آنگاه چون ضرایب معادله توابعی پیوسته هستند این معادله مرتبه n دارای n جواب مستقل خطی $y_1, y_2, ..., y_n$ است و جواب عمومی یکتای آن $y_h=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$ خواهد بود. برای حل این معادلات ابتدا معادله مشخصه (مفسر) آن را که یک چند جمله ای درجه n خواهد بود با جایگذاری r^k به جای $(k=0,1,...,n)$ $y^{(k)}$ به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$r^n+a_{n-1}r^{n-1}+...+a_1r+a_0=0$$

معادله فوق دارای n ریشه است و متناظر با هر ریشه از این چند جمله ای یک جواب به دست می‌آید، بسته به نوع ریشه‌ها (حقیقی یا مختلط) و مرتبه تکرار آنها دو حالت زیر به وجود می‌آید.

حالت اول: اگر $r=r_1$ ریشه حقیقی معادله مشخصه باشد که مرتبه تکرار آن s است متناظر با این ریشه s جواب مستقل خطی به صورت زیر برای معادله به دست می‌آید:

$$e^{r_1x}, xe^{r_1x}, ..., x^{s-1}e^{r_1x}$$

- متناظر با ریشه ساده فقط یک جواب e^{r_1x} برای معادله به دست می‌آید.

حالت دوم: اگر $(\beta\neq 0)r=\alpha\pm i\beta$ ریشه‌های مختلط معادله مشخصه با مترتبه تکرار s باشد متناظر با این $2s$ ریشه، $2s$ جواب مستقل خطی به صورت زیر برای معادله به دست می‌آید:

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

۳-۱- معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در حالات خاص

حالت اول: هرگاه معادله دیفرانسیل فاقد تابع باشد یعنی به صورت $f(x,y',y'')=0$، با فرض $y'=p$ و $y''=\frac{dp}{dx}=p'$ و جایگذاری در معادله مرتبه آن از ۲ به ۱ کاهش می‌یابد $(f(x,p,p')=0)$ و ما باید یک معادله مرتبه یک برحسب x,p را حل کنیم تا ابتدا p و سپس با انتگرال گیری از آن جواب عمومی معادله اولیه به دست می‌آید.

در حالت کلی اگر معادله مرتبه n فاقد $y,y',y'',\dots,y^{(m-1)}$ باشد یعنی به صورت کلی $f(x,y^{(m)},y^{(m+1)},\dots,y^{(n)})=0$، با تغییر متغیر $p=y^{(m)}$ به معادله‌ای از مرتبه $n-m$ برحسب p می‌رسیم.

حالت دوم: اگر معادله دیفرانسیل فاقد متغیر مستقل x باشد یعنی به صورت $f(y,y',y'')=0$، با انتخاب $p=y'$، y را متغیر مستقل گرفته و لذا:

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

و با جایگذاری در معادله به معادله مرتبه اول $f(y,p,p\frac{dp}{dy})=0$ برحسب y,p می‌رسیم که پس از حل آن به جای p، $\frac{dy}{dx}$ را قرار می‌دهیم تا با انتگرال‌گیری جواب عمومی معادله اصلی به دست آید.

- اگر معادله مرتبه دومی فاقد x و y باشد، حل آن به کمک حالت اول (معادله فاقد تابع y) ساده‌تر است.