بنا به (۴-۱) این موضوع برقرار است که

(۱۲-۱) اگر هیچ استراتژی معاملاتی غالب وجود نداشته باشد، آنگاه قانون قیمت واحد برقرار است. با این حال، عکس این موضوع لزومی ندارد که برقرار باشد.

به‌عبارت دیگر، اگر قانون قیمت واحد برقرار نباشد، آنگاه استراتژی معامله‌ای غالب موجود است. عکس این موضوع لزومی ندارد که برقرار باشد، زیرا چنانکه در مثال آتی ۵-۱ خواهیم دید، می‌توان استراتژی معاملاتی غالبی برای مدل داشت که در قانون قیمت واحد صدق کند. پس به یک معنی، عدم‌برقراری قانون قیمت واحد بدتر از داشتن استراتژی معاملاتی غالب است.

مثال ۵-۱ برای یک مثال آشکار که در آن قانون قیمت واحد برقرار نباشد بگیرید $N = ۱$، $K = ۲$، $r = ۱$، $S_۰ = ۱۰$، و $S_۱(\omega_۱) = S_۱(\omega_۲) = ۱۲$. پس $V_۱$ بر Ω ثابت است، و برای هر عدد λ تعداد نامتناهی از استراتژی‌های معاملاتی وجود دارد که $V_۱ = \lambda$، که هر کدام از آنها مقدار متفاوتی برای $V_۰$ به‌دست می‌دهد.

حال بیاییم $S_۱(\omega_۲)$ را به مقدار ۸ تغییر دهیم. برای هر $X \in \mathbb{R}^۲$ استراتژی منحصر به‌فرد H موجود است که $V_۱ = X$، پس قانون قیمت واحد برقرار است. با این حال، استراتژی معاملهٔ $H = (۱۰, -۱)$ در روابط $V_۰ = ۰$ و $V_۱ = (۸, ۱۲)$ صدق می‌کند، پس یک استراتژی معاملاتی غالب است. ■

اگر به دستهٔ مدل‌هایی که فاقد استراتژی‌های غالب هستند برگردیم، واضح است که این مدل‌ها نمی‌توانند استراتژی معاملاتی داشته باشند که با ثروت صفر شروع شوند و مطمئن باشند که به ثروت مثبت در زمان $t = ۱$ ختم می‌شوند. اما در مورد استراتژی‌هایی که با ثروت صفر شروع کنند و پولی از دست ندهند و در زمان $t = ۱$ در حداقل یکی از وضعیت‌های ω به مبلغ مثبتی ختم شوند، چه می‌توان گفت؟ به‌عبارت دیگر، سرمایه‌گذاران قادرند که در معامله‌ای سود کنند بدون آنکه در معرض ریسک باخت قرار داشته باشند. چنین فرصت سرمایه‌گذاری را فرصت آربیتراژ می‌نامند، چنین فرصتی از دید اقتصاد غیرمعقول است.

به‌طور رسمی، **فرصت آربیتراژ**[1] یک استراتژی معاملاتی H است که خواص زیر را دارد

(الف) $V_۰ = ۰$

(ب) $۰ \leqslant V_۱$

(ج) $۰ < EV_۱$.

1. arbitrage opportunity

توجه داریم که فرصت آربیتراژ یک راه بی‌خطر برای پول به‌دست آوردن است: با هیچ پولی شروع می‌کنیم و بدون آنکه بدهکار شویم، احتمال مثبتی وجود دارد که در خاتمه به پول مثبتی دست یابیم. اگر چنین فرصتی وجود می‌داشت، آنگاه هر کسی مایل بود که در چنین استراتژی معاملاتی داخل شود، که این خود باعث تغییر در قیمت‌ها می‌شود. چنین مدل اقتصادی در تعادل قرار ندارد. پس برای آنکه مدل یک‌دوره‌ای از منظر اقتصاد بامعنی باشد، فرصت آربیتراژ نمی‌تواند وجود داشته باشد. به واسطهٔ (۴-۱) و مثال ۶-۱، که در پایین می‌آید، اصل زیر درست است.

(۱۳-۱) اگر استراتژی معاملاتی غالب وجود داشته باشد، آنگاه فرصت آربیتراژ وجود دارد، ولی عکس آن لزومی ندارد که درست باشد.

مثال ۶-۱ فرض کنید $K=2$، $N=1$، $r=0$، $S_0=10$، $S_1(\omega_1)=12$، و $S_1(\omega_2)=10$ (تنها یک ورقه درکار است، و در اینجا اندیس معرف زمان است). استراتژی معاملاتی $H=(-10,1)$ یک فرصت آربیتراژ است، چراکه $V_0=0$ و $V_1=(2,0)$. با این حال، هیچ استراتژی معاملاتی غالبی وجود ندارد، چراکه $\pi=(0,1)$ اندازهٔ قیمت‌گذاری خطی است. ■

از (۲-۱) و این واقعیت که $B_t>0$ برای هر t و ω، نتیجه می‌شود که H تنها و تنها وقتی فرصت آربیتراژ است که روابط زیر برقرار باشند

(الف) $V_0^*=0$،

(ب) $0\leqslant V_1^*$،

(ج) $0<EV_1^*$.

در واقع شرط معادل دیگری هم برقرار است:

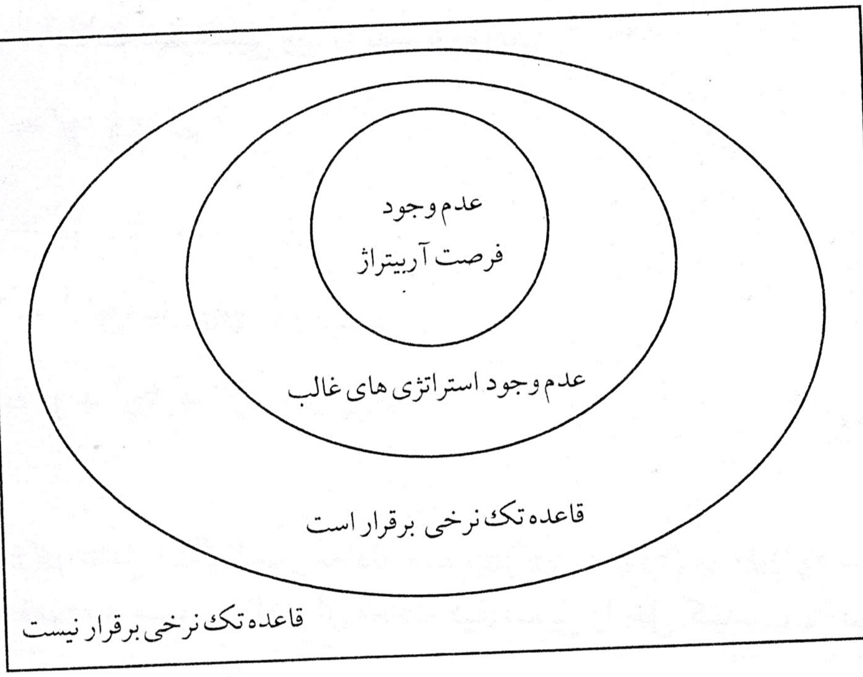
(۱۴-۱) تنها و تنها وقتی H فرصت آربیتراژ است که روابط زیر برقرار باشند

(الف) $0\leqslant G^*$،

(ب) $0<EG^*$

(ج) $V_0^*=0$.

برای دیدن این هم‌ارزی، فرض کنید H فرصت آربیتراژ باشد. از (۳-۱) داریم $G^*=V_1^*-V_0^*$، لذا از نکات بالا داریم $0\leqslant G^*$ و $EG^*=EV_1^*-EV_0^*=EV_1^*>0$. به‌عکس فرض کنید (الف) و (ب) در (۱۴-۱) برای یک استراتژی معاملهٔ $\hat{H}$ برقرار باشد. سپس استراتژی $H=(H_0,\hat{H}_1,\ldots,\hat{H}_N)$



شکل ۱-۱

را در نظر بگیرید که در آن

$$H_\circ = -\sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n S_n^*(\circ)$$

تحت H داریم $V_\circ^* = \circ$. به‌علاوه، از (۳-۱) داریم $V_1^* = V_\circ^* + G^* = G^*$. پس (الف) و (ب) در (۱۴-۱) نتیجه می‌دهند که $V_1^* \geqslant \circ$ و $EV_1^* > \circ$، که در این حالت بر طبق نکات بالا H یک فرصت آربیتراژ است.

در جمع‌بندی، چنانکه در شکل ۱-۱ مشخص شده، تمامی مدل‌های یک‌دوره‌ای بازار اوراق بهادار را می‌توان به چهار دسته تقسیم کرد: (۱) فرصت آربیتراژ وجود ندارد، (۲) فرصت آربیتراژ وجود دارد ولی هیچ استراتژی معاملاتی غالبی وجود ندارد، (۳) استراتژی‌های معاملاتی غالب وجود دارند اما قانون قیمت واحد برقرار است، و (۴) قانون قیمت واحد برقرار نیست. در بین اینها، تنها دستهٔ اول است که از نقطه‌نظر اقتصاد معقول می‌باشد.

متأسفانه (حداقل، زمانی که دو یا تعداد بیشتری از اوراق ریسکی موجود باشند) کار ساده‌ای نیست که مستقیماً بررسی کرد که آیا مدل دارای آربیتراژ است. با این حال، یک شرط لازم و کافی مهم برای آنکه

مدل فاقد فرصت‌های آربیتراژ باشد موجود است. این شرط از قیمت‌های تنزیل شده و چیز دیگری به نام اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک استفاده می‌کند، که این اندازه نوع خاصی از یک اندازهٔ قیمت‌گذاری خطی است. این اندازه‌ها موضوع بخش بعدی هستند.

مسئلهٔ ۴-۱ مدلی را درنظر بگیرید که $K = ۳$، $N = ۲$، $r = ۰$، و قیمت‌های اوراق بهادار عبارت باشند از:

n	$S_n(۰)$	$S_n(۱)(\omega_۱)$	$S_n(۱)(\omega_۲)$	$S_n(۱)(\omega_۳)$
۱	۴	۸	۶	۳
۲	۷	۱۰	۸	۴

نشان دهید که استراتژی‌های معاملاتی غالب وجود دارند و قانون قیمت واحد برقرار است.

مسئلهٔ ۵-۱ برای مثال ۳-۱ نشان دهید که استراتژی‌های معاملاتی غالب وجود ندارند در حالی که فرصت آربیتراژ موجود است.

۳-۱ اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک

در بخش قبل توضیح دادیم که در صورت وجود یک اندازه قیمت‌گذاری خطی هیچ استراتژی معاملاتی غالبی وجود ندارند، اما با این حال می‌توان فرصت‌های آربیتراژ داشت. برای اجتناب از فرصت آربیتراژ، احتیاج به چیز بیشتری داریم: باید اندازهٔ قیمت‌گذاری خطی موجود باشد که وزن مثبتی در هر $\omega \in \Omega$ به‌دست بدهد.

در صورتی یک اندازه احتمال Q بر Ω را **اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک**[1] می‌خوانیم که دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف) برای هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $Q(\omega) > ۰$، و

(ب) برای $n = ۱, \ldots, N$ داشته باشیم $E_Q[\Delta S_n^*] = ۰$.

---

1. risk neutral

در اینجا منظور از $E_Q[X]$ مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی X تحت اندازهٔ احتمال Q است. توجه کنیم که

$$E_Q[\Delta S_n^*] = E_Q[S_n^*(1) - S_n^*(0)] = E_Q[S_n^*(1)] - S_n^*(0),$$

پس رابطهٔ $E_Q[\Delta S_n^*] = 0$ معادل است با

$$E_Q[S_n^*(1)] = S_n^*(0), \qquad n = 1, 2, \ldots, N \tag{۱-۱۵}$$

این اساساً همان رابطهٔ (۱-۷) است و می‌گوید که تحت این اندازهٔ احتمال مقدار مورد انتظار زمان $t = 1$ قیمت تنزیل شدهٔ هر ورقهٔ ریسکی مساوی قیمت ابتدایی آن ورقه است. بنابراین، یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک چیزی نیست جز یک اندازه قیمت‌گذاری خطی که وزن مثبتی به هر $\omega \in \Omega$ نسبت می‌دهد.

حال به نتیجه‌ای بسیار مهم می‌رسیم:

(۱-۱۶) تنها و تنها وقتی فرصت آربیتراژ وجود ندارد که یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک Q موجود باشد.

پیش از اثبات این نتیجه، می‌ارزد که به مثال‌هایی نگاه کرده و درکی از موضوع به‌دست آوریم.

مثال ۱-۱ (ادامه) می‌خواهیم اعداد اکیداً مثبت $Q(\omega_1)$ و $Q(\omega_2)$ را به‌دست آوریم که (۱-۱۵) برقرار باشد، یعنی

$$5 = 6Q(\omega_1) + 4Q(\omega_2)$$

همچنین Q باید یک اندازه احتمال باشد، پس باید در تساوی زیر صدق کند

$$1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_2)$$

به‌راحتی ملاحظه می‌شود که مقادیر $Q(\omega_1) = Q(\omega_2) = \frac{1}{2}$ در هر دو معادله صدق می‌کنند، پس این Q یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک است، و به‌دلیل (۱-۱۶) فرصتی برای آربیتراژ وجود ندارد. ■

البته، در این مثال ساده، از فرایند قیمت تنزیل شده ملاحظه می‌گردد که مجالی برای آربیتراژ نیست. در حقیقت، در حالتی که تنها یک ورقهٔ ریسکی در کار باشد (یعنی، $N = 1$)، می‌توان درک ساده‌ای

از اصل (۱-۱۶) داشت. از این تعریف پیداست که، تنها و تنها زمانی فرصت آربیتراژ وجود دارد که بتوان مقدار H_1 از فرایند قیمت تنزیل شدهٔ S^* را اختیار کرد که احتمال مثبتی برای سود کردن در آن وجود داشته ولی زیانی در آن نباشد. این به آن معنی است که یکی از این دو حالت اتفاق می‌افتد که یا $\Delta S^* \geqslant 0$ و برای حداقل یک $\omega \in \Omega$ داریم $\Delta S^*(\omega) > 0$، و یا $\Delta S^* \leqslant 0$ و برای حداقل یک $\omega \in \Omega$ داریم $\Delta S^*(\omega) < 0$. به‌وضوح، در هر دو حالت غیرممکن است که اندازهٔ احتمال اکیداً مثبتی را یافت که در (۱-۱۵) صدق کند. از سوی دیگر، اگر هیچ یک از این دو حالت رخ ندهد، آنگاه می‌توان یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک را یافت و امکان آربیتراژ وجود ندارد.

مثال ۲-۱ (ادامه) دستگاه معادلاتی که باید حل شود، یعنی دستگاه

$$5 = 6Q(\omega_1) + 4Q(\omega_2) + 3Q(\omega_3)$$
$$1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3)$$

از دو معادله با سه مجهول تشکیل شده است، لذا دستگاه را برای دو تا از مجهول‌ها برحسب سومین، مثلاً برحسب $Q(\omega_1)$، حل می‌کنیم. پس این دستگاه برای مقدار دلخواه $Q(\omega_1)$ برقرار است هرگاه قرار دهیم

$$Q(\omega_2) = 2 - 3Q(\omega_1) \quad \text{و} \quad Q(\omega_3) = -1 + 2Q(\omega_1)$$

اما برای آنکه Q اندازه احتمال اکیداً مثبت باشد باید برای هر i داشته باشیم $Q(\omega_i) > 0$. با استفاده از دو معادلهٔ قبل، این منجر به سه نامعادله برای $Q(\omega_1)$ می‌شود که در بین آن‌ها نامعادلهٔ $Q(\omega_1) > 0$ را داریم. بنا به معادلهٔ معرفی‌کنندهٔ $Q(\omega_2)$، نامعادلهٔ $Q(\omega_2) > 0$ تنها و تنها وقتی درست است که $Q(\omega_1) < \frac{2}{3}$. مشابهاً، رابطهٔ $Q(\omega_3) > 0$ تنها و تنها وقتی درست است که $\frac{1}{2} < Q(\omega_1)$. لذا جواب Q تنها و تنها وقتی اکیداً مثبت است که $\frac{1}{2} < Q(\omega_1) < \frac{2}{3}$. به‌عبارت دیگر، برای مقادیر λ صادق در $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{2}{3}$ عبارت $Q = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda)$ یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک است، و برای این مقادیر است که فرصت آربیتراژ وجود ندارد. ■

مثال ۳-۱ (ادامه) به دنبال جوابی از دستگاه

$$\begin{aligned} 5 &= 6Q(\omega_1) + 6Q(\omega_2) + 4Q(\omega_3) \\ 10 &= 12Q(\omega_1) + 8Q(\omega_2) + 8Q(\omega_3) \\ 1 &= Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3) \end{aligned}$$

می‌گردیم. جواب منحصر به‌فردی برای این معادلات وجود دارد، در واقع $Q(\omega_1) = Q(\omega_3) = \frac{1}{2}$ و $Q(\omega_2) = 0$. این یک اندازه قیمت‌گذاری خطی است، اما این جواب اکیداً مثبت نیست، پس اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسکی وجود ندارد. لذا از (۱۶-۱)، امکان آربیتراژ وجود دارد. یافتن یکی از این فرصت‌های آربیتراژ قدری کار می‌برد؛ ما بعداً به این مثال برمی‌گردیم. ■

مثال ۳-۱ نشان می‌دهد که چرا شهودی که برای یک ورقه درست کار می‌کرد برای دو یا تعداد بیشتری ورقه ریسکی کار نمی‌کند. با نگاهی به فرایند قیمت تنزیل شده ورقهٔ بهادار اول، معلوم می‌شود که می‌توان یک اندازه احتمال اکیداً مثبت Q را یافت که $E_Q[S_1^*(1)] = 5$. مشابهاً برای ورقهٔ بهادار ریسکی دوم. با این حال مشکل آن است که نمی‌توان اندازهٔ احتمال اکیداً مثبتی یافت که در آن واحد برای هر دو ورقه کار کند. تأثیر متقابل بین دو ورقه امکان فرصت آربیتراژ را فراهم می‌کند حتی اگرچه هر ورقه به تنهایی قابل‌قبول است. و به‌واسطهٔ این تأثیرات متقابل است که درک شهودی اصل (۱۶-۱) را برای دو یا تعداد بیشتر اوراق پیچیده می‌کند.

این سه مثال سه نوع وضعیت را توصیف می‌کنند که عبارت‌اند از (۱) اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک منحصر به‌فردی موجود است، (۲) تعداد بی‌شماری از اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک وجود دارد، یا (۳) اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک وجود ندارد.

حال برمی‌گردیم به توضیح (۱۶-۱) برای حالتی که $N \leqslant 2$. برای مدل یک دوره‌ای در حالت کلی، مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbb{W} \equiv \{X \in \mathbb{R}^K : \quad X = G^* \text{ داریم } \mathrm{H} \text{ برای برخی استراتژی‌های معادلاتی}\}$$

می‌بایست $\mathbb{W}$ را به‌عنوان یک مجموعه از متغیرهای تصادفی در نظر گرفت، و به دلیل (۳-۱) باید که هر $X \in \mathbb{W}$ را به‌عنوان ثروت تنزیل شده زمان $t = 1$ برای حالتی که سرمایه‌گذاری اولیه صفر باشد در نظر گرفت. توجه کنید که در حقیقت $\mathbb{W}$ یک زیرفضا از $\mathbb{R}^k$ است، یعنی برای هر X و $\hat{X}$ از $\mathbb{W}$ و برای اعداد دلخواه a و b داریم $aX + b\hat{X} \in \mathbb{W}$.

حال، مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbb{A} \equiv \{X \in \mathbb{R}^K : X \geqslant 0, X \neq 0\}$$

این دقیقاً همان ثمن نامنفی از $\mathbb{R}^K$ است. به‌واسطهٔ (۱-۱۴) آشکار است که فرصت آربیتراژ تنها و تنها وقتی وجود دارد که $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} \neq \varnothing$، یعنی اگر و تنها اگر زیرفضای $\mathbb{W}$ ثمن نامنفی از $\mathbb{R}^K$ را قطع کند. لذا برای یافتن یک فرصت آربیتراژ در مدلی که در آن هیچ اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک وجود ندارد، می‌توان از جبر خطی استفاده کرد تا $\mathbb{W}$ را تعیین کرد و سپس برداری در آن یافت که در $\mathbb{A}$ نیز باشد.

حال متناظر با زیرفضای $\mathbb{W}$ **زیرفضای متعامد**[1]

$$\mathbb{W}^{\perp} \equiv \{Y \in \mathbb{R}^K : \quad X \cdot Y = 0 \quad \text{،} \quad X \in \mathbb{W} \quad \text{برای هر}\}$$

که در آن مقدار $X \cdot Y = X(\omega_1)Y(\omega_1) + \cdots + X(\omega_K)Y(\omega_K)$ **حاصل‌ضرب داخلی**[2] X و Y را نشان می‌دهد. اگر شکل هندسی را برای حالت $K = 2$ در نظر بگیرید (شکل ۲-۱ را ملاحظه کنید) یا حتی شکل حالت $K = 3$ را، آنگاه راحت می‌توان باور کرد که تساوی $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$ از وجود یک نیم‌خط در $\mathbb{W}^{\perp}$ خبر می‌دهد که هر مؤلفه از هر نقطه غیر مبدأ از آن نیم‌خط عددی اکیداً مثبت است.[4] به‌ویژه، بر آن نیم‌خط می‌توان نقطه‌ای را یافت که مجموع مؤلفه‌هایش برابر یک باشد، و آن نقطه را می‌توان به‌عنوان یک اندازهٔ احتمال تعبیر کرد. به بیان دیگر، اگر قرار دهیم

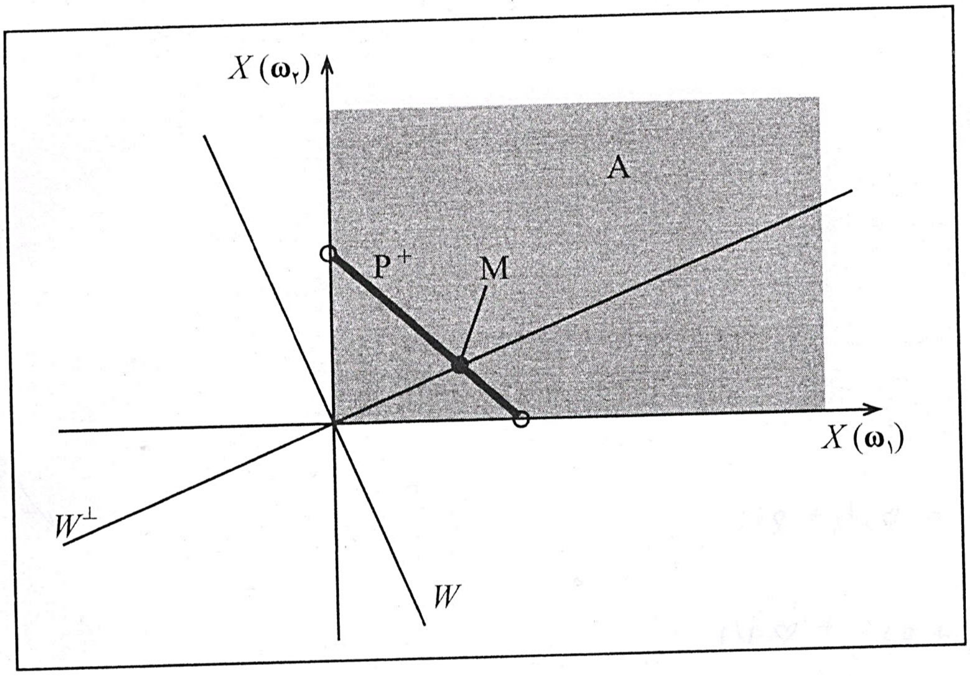
$$\mathbb{P}^+ \equiv \{X \in \mathbb{R}^K : X_1 + \cdots + X_K = 1 \quad , \quad X_1 > 0, \ldots, X_K > 0\}$$

آنگاه هندسه پیشنهاد می‌کند که تساوی $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \varnothing$ تنها و تنها وقتی اتفاق می‌افتد که $\mathbb{W}^{\perp} \cap \mathbb{P}^+ \neq \varnothing$.

چون برای هر n داریم $\Delta S_n^* \in \mathbb{W}$، نتیجه می‌گیریم که در عمل هر عضو از مجموعهٔ $\mathbb{W}^{\perp} \cap \mathbb{P}^+$ یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک است. به‌عکس، اگر Q هر اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک باشد، آنگاه برای هر $G^* \in \mathbb{W}$ (با استراتژی معاملهٔ H) داریم

$$E_Q G^* = E_Q\left[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\right] = \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q[\Delta S_n^*] = 0 \qquad (۱-۱۷)$$

1. orthogonal subspace 2. inner product



شکل ۲-۱ تعبیر هندسی اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک.

پس $Q \in \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$. لذا اگر $\mathbb{M}$ بیانگر مجموع کلیهٔ اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک باشد، داریم

$$\mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$$

به‌علاوه، با شهود هندسی که در بالا استفاده شد حدس می‌زنیم که رابطهٔ $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \varnothing$ تنها و تنها وقتی درست است که $\mathbb{M} \neq \varnothing$. البته این حدس همانند اصل (۱-۱۶) است.

برای اینکه به این استدلال دقت بیشتری ببخشیم و آن را برای حالت کلی K به‌کار بریم، مناسب است که شقی از قضیهٔ هان ـ باناخ را که نامش **قضیهٔ ابرصفحه جدا کننده**[1] است به‌کار بریم. برای این منظور مجموعهٔ

$$\mathbb{A}^+ = \{X \in \mathbb{A} : \quad EX = ۱\}$$

را در نظر بگیرید. این زیرمجموعه‌ای بسته، کراندار، و محدب[5] از $\mathbb{R}^K$ است، و فقدان فرصت‌های آربیتراژ از هم جدا بودن $\mathbb{W}$ و $\mathbb{A}^+$ را منجر می‌شود. لذا بنا به قضیهٔ ابرصفحه جدا کننده، عنصر

1. Separating Hyperplane Theorem

$Y \in \mathbb{W}^{\perp}$ موجود است که برای هر $X \in \mathbb{A}^{+}$ داریم $X \cdot Y > ۰$. برای هر $k = ۱, \ldots, K$ می‌توان بردار X در $\mathbb{A}^{+}$ را یافت که مؤلفهٔ kـامش مثبت است و بقیهٔ مؤلفه‌هایش صفر هستند، بنابراین تمامی مؤلفه‌های Y باید اکیداً مثبت باشند. با قرار دادن $Q(\omega_k) = Y(\omega_k)/[Y(\omega_۱) + \cdots + Y(\omega_K)]$، روشن است که Q اندازهٔ احتمالی است که $Q \in \mathbb{W}^{\perp}$. چون برای هر n داریم $\Delta S_n^* \in \mathbb{W}$، نتیجه می‌گیریم که Q یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک است.

در مورد عکس (۱-۱۶) چطور؟ اثبات آن ساده است: اگر Q یک اندازه احتمال نسبت به ریسک خنثی باشد، آنگاه چنانکه در بالا توضیح داده شد، برای استراتژی معاملاتی دلخواه H معادلهٔ (۱-۱۷) برقرار است، که این بیانگر آن است که G^* نمی‌تواند در هر دوی $G^* \geqslant ۰$ و $EG^* > ۰$ صدق کند. سپس در معیت (۱-۱۴) مجالی برای آربیتراژ وجود ندارد، بنابراین حدس ما و اصل (۱-۱۶) به اثبات می‌رسند.

مثال ۱-۳ (ادامه) می‌خواهیم $\mathbb{W} \cap \mathbb{A}$ را حساب کنیم که می‌دانیم ناتهی است. با در دسترس داشتن S_n^*، متغیر ΔS_n^* را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

n	$\Delta S_n^*(\omega_۱)$	$\Delta S_n^*(\omega_۲)$	$\Delta S_n^*(\omega_۳)$
۱	۱	۱	-۱
۲	۲	-۲	-۲

نتیجه می‌شود که

$$\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^۳ : X = (H_۱ + ۲H_۲\ ,\ \ H_۱ - ۲H_۲\ ,\ \ -H_۱ - ۲H_۲) \quad \text{داریم } H_۱, H_۲ \in \mathbb{R} \text{ برای برخی}\}$$

توجه کنید که برای تمامی $X \in \mathbb{W}$ داریم $X_۱ + X_۳ = ۰$. به‌عکس، برای هر بردار X صادق در $X_۱ + X_۳ = ۰$، می‌توان استراتژی معاملهٔ منحصر به‌فرد H را یافت که $G^* = X$. بنابراین

$$\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^۳ : \quad X_۱ + X_۳ = ۰\}$$

یعنی،

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{Y \in \mathbb{R}^۳ : \quad Y = (\lambda, ۰, \lambda) \quad ، \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ برای یک عنصر}\}$$

حال با مقایسهٔ $\mathbb{W}$ و $\mathbb{A}$ می‌بینیم که

$$\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \{X \in \mathbb{R}^3 : \quad X_1 = X_3 = 0,\ X_2 > 0\}$$

پس با شروع از هر عدد مثبت X_2، استراتژی معاملهٔ H را محاسبه می‌کنیم که ارزش پرتفوی در زمان $t = 1$ را به‌صورت $(0, X_2, 0)$ به‌دست دهد. این H جواب دستگاه زیر است

$$H_1 + 2H_2 = 0$$
$$H_1 - 2H_2 = X_2$$

یعنی، $H_1 = \frac{X_2}{2}$ و $H_2 = \frac{-X_2}{4}$. بالاخره با قرار دادن

$$H_0 = -H_1 S_1^*(0) - H_2 S_2^*(0) = -\left(\frac{X_2}{2}\right)(5) - \left(\frac{-X_2}{4}\right)(10),$$

به‌دست می‌آید $H_0 = 0$. آشکارا $H = (0, \frac{X_2}{2}, \frac{-X_2}{4})$ یک فرصت آربیتراژ برای هر $X_2 > 0$ است.

■

مسئلهٔ ۱-۶ نشان دهید که $\mathbb{W}$ و $\mathbb{W}^\perp$ زیرفضا هستند.

مسئلهٔ ۱-۷ در هر یک از موارد زیر $\mathbb{W}$ و $\mathbb{W}^\perp$ را مشخص کنید

(الف) مثال ۱-۱.

(ب) مثال ۱-۲.

(ج) مثال ۱-۴.

مسئلهٔ ۱-۸ در مثال ۱-۴ تمامی اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک و یا معادلاً تمامی فرصت‌های آربیتراژ را تعیین کنید.

مسئلهٔ ۱-۹ فرض کنید $K = 2$، $N = 1$، و اینکه نرخ بهره پارامتر عددی $r \geq 0$ است. همچنین، فرض کنید $S_0 = 1$، $S_1(\omega_1) = u$ («بالا»)، و $S_1(\omega_2) = d$ («پایین»)، که پارامترهای u و d در رابطهٔ $u > d > 0$ صدق می‌کنند. برای چه مقادیری از r، u، و d اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک وجود دارد؟ اندازهٔ متناظر را مشخص کنید. برای مقادیر دیگر، فرصت‌های آربیتراژ را مشخص کنید.

مسئلهٔ ۱۰-۱ فرض کنید A ماتریس $(K+1)\times(K+2N)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \Delta S_1^*(\omega_1) & -\Delta S_1^*(\omega_1) & \Delta S_2^*(\omega_1) & \cdots & -\Delta S_N^*(\omega_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta S_1^*(\omega_2) & -\Delta S_1^*(\omega_2) & \Delta S_2^*(\omega_2) & \cdots & -\Delta S_N^*(\omega_2) & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_1^*(\omega_K) & -\Delta S_1^*(\omega_K) & \Delta S_2^*(\omega_K) & \cdots & -\Delta S_N^*(\omega_K) & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

و فرض کنید b مؤلفهٔ $(K+1)$-ام بردار ستونی $(1, 0, \cdots, 0)'$ باشد. نشان دهید که تنها و تنها وقتی روابط

$$Ax = b, \qquad x \geqslant 0, \qquad x \in \mathbb{R}^{K+2N}$$

دارای جواب است که فرصت آربیتراژ وجود داشته باشد.

مسئلهٔ ۱۱-۱ لم فارکاس[1]، که شکلی از قضیهٔ ابرفضای جدا کننده است، می‌گوید که برای ماتریس مفروض $m \times n$ مانند A و بردار ستونی m ـ بعدی b، یکی از

$$Ax = b, \qquad x \geqslant 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

یا

$$y'A \leqslant 0, \qquad y'b > 0, \qquad y \in \mathbb{R}^m$$

دارای جواب است، اما هر دو همزمان نمی‌توانند جواب داشته باشند. با استفاده از این لم و با استفاده از نتیجه‌های مسئلهٔ ۱۰-۱ نشان دهید که اگر فرصت‌های آربیتراژ وجود نداشته باشند، آنگاه یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک وجود دارد.

۴-۱ ارزش‌گذاری مطالبات مشروط

منظور از مطالبهٔ مشروط[2] یک متغیر تصادفی X است که پرداختی در زمان $t = 1$ را نمایش می‌دهد. مطالبهٔ مشروط را می‌توان به‌عنوان قسمتی از یک قرارداد که بین فروشنده و خریدار در زمان

1. Farkas' Lemma 2. contingent claim