۲-۱۲- مسیرهای قائم (متعامد) یک دسته منحنی

هرگاه دو دسته منحنی طوری باشند که هر منحنی دلخواه از یک دسته، بر کلیه منحنی های دسته دیگر عمود باشد، در این صورت یک دسته منحنی را مسیرهای قائم دسته های دیگر نامند . برای به دست آوردن معادله مسیرهای متعامد دسته منحنی های ϕ ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می کنیم (طبق بخش ۱-۲ فصل اول این کار با حذف ثابت c بین معادله ϕ و مشتق آن نسبت به x امکان پذیر است)، حال اگر در این معادله y' را به $-\frac{1}{y'}$ تبدیل کنیم معادله دیفرانسیل مسیر قائم ψ حاصل می‌شود که با حل معادله دیفرانسیل مسیر قائم دسته منحنی های مسیر قائم به دست می‌آیند.

از نظر فیزیکی خطوط شار و منحنی های هم قوه (هم پتانسیل) مسیرهای متعامد یکدیگر هستند.

$$y = 2xy' + \ln y' \qquad y' = p \qquad y = 2xp + \ln p \;\Rightarrow\; y' = 2p + 2xp' + \frac{p'}{p}$$

$$-p = p'(2x + \frac{1}{p}) \Rightarrow -x' = \frac{2x}{p} + \frac{1}{p^2} \Rightarrow x' + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2} \qquad \mu(p) = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln p} = p^2$$

$$x = \frac{1}{p^2}(\int -dp + c) \Rightarrow x = \frac{1}{p^2}(-p + c) \qquad p = 0,\; y' = 0, y = c$$

$$y' = p^2 + 2xpp' + \frac{p'}{p^2} \Rightarrow p - p^2 = p'(2xp + \frac{1}{p^2}) \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{p - p^2}(2xp + \frac{1}{p^2})$$

$$x' - \frac{2}{1 - p^{\square}} x = \frac{1}{p^3 - p^4}$$

$$F(x,y,c)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y,y')=0$$

$$y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$$

$$g(x,y,y')=0$$

حـــــل

$$G(x,y,c)=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow \frac{-1}{y'} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$y' = \frac{2(\frac{y}{x})}{1 - (\frac{y}{x})^2} \Rightarrow u = \frac{y}{x}$$