$$y = cx + \frac{a}{2c} \Rightarrow y^2 = c^2x^2 + ax + \frac{a^2}{4c^2}$$

$$0 = x - \frac{a}{2c^2} \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2c^2} \ \Rightarrow \frac{2x}{a} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \ \frac{a}{2x} = c^2$$

**۲-۹- معادله کلرو:** هر معادله به شکل $y = xy' + f(y')$ معادله کلرو نامیده می شود که دارای جواب عمومی $y = cx + f(c)$ می‌باشد. اگر $y' = p$ فرض شود:

$$y = xp + f(p) \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} y' = p + (x + f'(p))p' \overset{y'=p}{\Rightarrow} p'(x + f'(p)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = cx + f(c) & \text{دمته خطوط جواب عمومی معادله کلرو} \\ x = -f'(p) \Rightarrow x + f'(c) = 0 & \text{(مشتق جواب عمومی معادله کلرو نسبت به } c\text{)} \end{cases}$$

جواب تکین (ایزوله یا منفرد) معادله کلرو در صورت امکان با حذف $c$ از دستگاه $\begin{cases} y = cx + f(c) \\ x + f'(c) = 0 \end{cases}$ و یا به صورت پارامتری برحسب $c$ به دست می آید (جواب تکین بر دسته جواب‌های عمومی مماس است و همان پوش جواب های عمومی می باشد . پس معادله خطوط مماس بر جواب تکین معادله کلرو به صورت $y = cx + f(c)$ بیان می شود).

معادله کلرو به صورت $x = yx' + f(x')$ دارای جواب عمومی به شکل $x = cy + f(c)$ است.

**۲-۱۰- معادله لاگرانژ:** این معادله به شکل $y = xf(y') + g(y')$ بیان می شود که حالت کلی‌تر معادله کلرو است. با فرض $y' = p$:

$$y = xf(p) + g(p) \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} y' = p = f(p) + (xf'(p) + g'(p))p' \Rightarrow p - f(p) = (xf'(p) + g'(p))\, p'$$

تقسیم طرفین بر $p - f(p)$

$$\Rightarrow 1 = (x\frac{f'(p)}{p - f(p)} + \frac{g'(p)}{p - f(p)})p' \Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

معادله اخیر یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به تابع $x$ و متغیر $p$ می‌باشد (به خاطر سپردن این معادله می تواند سرعت عمل را بالا برد). از حل این معادله جواب $x = \phi(p)$ حاصل می شود و با حذف $p$ در دستگاه $\begin{cases} x = \phi(p) \\ y = xf(p) + g(p) \end{cases}$ جواب عمومی به دست می‌آید، در غیر این صورت جواب پارامتری بیان می شود.

به علت تقسیم طرفین بر $p - f(p)$، ریشه‌های معادله $p - f(p) = 0$ جواب های غیرعادی یا تکین معادله لاگرانژ را به دست می دهد.

در معادله لاگرانژ جواب تکین، خط است.

$$M = y^3 + xy^2 + y \qquad N = x^3 + x^2y + x$$

$$M_y = 3y^2 + 2xy + 1 \qquad N_x = 3x^2 + 2xy + 1 \qquad g(x, y) = g(xy)$$

$$\frac{M_y - N_x}{Ng_x - Mg_y} = \frac{3y^2 - 3x^2}{(x^3 + x^2y + x)y - (y^3 + xy^2 + y)x} = \frac{3y^2 - 3x^2}{x^3y - y^3x} = \frac{3(y^2 - x^2)}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{-3}{xy}$$

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{Ng_x - Mg_y} dg} = e^{\int \frac{-3}{g} dg} = e^{-3 \ln g} = \frac{1}{g^3} = \frac{1}{x^3y^3}$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}(y(x^{3}+2y^{4})dx-x(3x^{3}+y^{4})dy=0)$$

$$(x^{\alpha+3}y^{\beta+1}+2x^{\alpha}y^{\beta+5})dx-(3x^{\alpha+4}y^{\beta}+x^{\alpha+1}y^{\beta+4})dy=0$$

$$M_y=(\beta+1)x^{\alpha+3}y^{\beta}+2(\beta+5)x^{\alpha}y^{\beta+4}$$

$$N_x=-(\alpha+4)3x^{\alpha+3}y^{\beta}-(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+4}$$

$$\begin{cases}\beta+1=-3\alpha-12\\ 2\beta+10=-\alpha-1\end{cases}$$