Stanley R. Pliska

Introduction to Mathematical Finance (Discrete Time Models)

## - بازارهای یک دوره‌ای

مدل‌های یک دوره‌ای نشان دهنده واقعیت پدیده‌های تصادفی وابسته به زمان مانند قیمت‌های سهام و اوراق قرضه نیستند، اما قادرند بسیاری از اصول اقتصادی مهم وابسته به پیچیده‌ترین مدل‌های زمان پیوسته را تبیین نمایند.

### مشخصه‌های مدل یک دوره‌ای

$t=0$ : زمان اولیه $\quad t=1$ زمان نهایی (امکان داد و ستد و مصرف در هر دو این زمان‌ها وجود دارد)

$\Omega$ : یک فضای نمونه متناهی با $K$ عضو متناهی $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_K\}$ ($\omega\in\Omega$ را باید به عنوان یکی از وضعیت‌های ممکن در نظر گرفت که مقدارش در زمان $t=0$ نامعلوم ولی در زمان $t=1$ برای سرمایه گذاران آشکار خواهد شد)

$P$ : یک اندازه احتمال بر $\Omega$ که برای هر $\omega\in\Omega$، $P(\omega)>0$

فرایند حساب بانک (Bank Account) : $B=\{B_t : t=0,1\}$ که در آن $B_0=1$ و $B_1$ متغیری تصادفی است. وجه تمایز فرایند حساب بانک از باقی اوراق بهادار این است که در زمان $t=1$ قیمت $B_1(\omega)$ در هر $\omega\in\Omega$ مثبت است (معمولاً داریم $B_1\geq 1$)، $B_1$ به عنوان ارزش حساب بانک در زمان $t=1$ است که در زمان $t=0$ به میزان یک دلار در حساب سرمایه گذاری شده است و $r\equiv B_1-1\geq 0$ به عنوان نرخ بهره (interest rate) تصوری شود. در بسیاری از کاربردها، مقادیر $r$ و $B_1$ اعداد تعینی (deterministic) فرض می‌شوند (با این وجود امکان دارد $B_1$ به عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفته شود که آنگاه شرط $r\geq 0$ را نداریم)

فرایند قیمت (price process) : $S=\{S_t : t=0,1\}$ که در آن $S_t=(S_1(t),S_2(t),\dots,S_N(t))$ ($N<\infty$) و $S_n(t)$ قیمت ورقه بهادار $n$ در زمان $t$ است (در بسیاری از کاربردها این اوراق دنباله‌ای از سهام می‌باشند). قیمت‌های زمان $t=0$ این اوراق اعداد مثبتی هستند که برای سرمایه گذاران مشخص هستند، در حالیکه در آن زمان قیمت‌های زمان $t=1$ متغیرهای تصادفی نامنفی هستند که تنها در زمان $t=1$ برای سرمایه گذاران مشخص می‌شوند (برای $N=1$ مناسب است که برای سادگی قیمت زمان $t$ را به $S_t$ نشان دهیم)

### چند کمیت مورد علاقه

- یک استراتژی معاملاتی (trading strategy) $H=(H_0,H_1,\dots,H_N)$ پرتفوی سرمایه گذار را از زمان $t=0$ تا زمان $t=1$ توصیف می‌کند. $H_0$ مقدار پولی است که در حساب بانک سرمایه گذاری می‌شود و برای $n\geq 1$ عدد $H_n$ تعداد واحدهای ورقه بهادار $n$ام است (مثلاً تعداد سهام) که در بین زمان‌های $0$ و $1$ نگهداری می‌شود. در حالت کلی $H_n$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد (عدد منفی به معنی قرض یا فروش استقراضی است)، اما گاهی قیودی برای استراتژی معاملاتی گذاشته می‌شود مثلاً فروش استقراضی اوراق بهادار ریسکی مجاز نباشد یعنی برای $n\geq 1$، $H_n\geq 0$.

- فرایند ارزش (Value Process) : $V=\{V_t : t=0,1\}$ توصیف کننده ارزش کل پرتفوی در هر نقطه از زمان است.

$$V_t=H_0B_t+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n(t)\qquad t=0,1$$

پس فرایند ارزش به انتخاب استراتژی معاملاتی $H$ بستگی دارد و $V_1$ یک متغیر تصادفی است.

- فرایند عایدی (gains process) : $G$ یک متغیر تصادفی است که معرف سود کل و یا ضرر کل تولید شده توسط سبد در فاصله زمانی $0$ تا $1$ است. چون $H_n(S_n(1)-S_n(0))$ معرف سود خالص حاصل از سرمایه گذاری در ورقه $n$ام است، فرایند عایدی عبارت است از

$$G=H_0r+\sum_{n=1}^{N}H_n\Delta S_n\qquad (\Delta S_n\equiv S_n(1)-S_n(0))$$

پس $\quad V_1=V_0+G$

- تغییر نسبی قیمت‌های سهام در مقایسه با هم موضوع مهمی است و تغییرات قیمت‌ها را به نحوی نرمالیزه کنیم که حساب بانک ثابت شود، به عبارتی می‌خواهیم که حساب بانک را نیومره (numeraire) کنیم. این کار با معرفی سه فرایند زیر انجام می‌شود.

فرایند قیمت تنزیل شده (discounted price process) : $S_n^*(t)=\dfrac{S_n(t)}{B_t}$، $S_t^*\equiv(S_1^*(t),S_2^*(t),\dots,S_N^*(t))$، $S^*=\{S_t^*, t=0,1\}$ $\quad n=1,2,\dots,N;\ t=0,1$

" ارزش تنزیل شده : $V^*=\{V_t^* : t=0,1\}$، $\quad V_t^*=H_0+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n^*(t)\qquad t=0,1$

" عایدی تنزیل شده : $G^*\equiv\sum_{n=1}^{N}H_n\Delta S_n^*$ که $\Delta S_n^*\equiv S_n^*(1)-S_n^*(0)$. پس $V_t^*=\dfrac{V_t}{B_t}$ و $V_1^*=V_0^*+G^*$.

## - استراتژی غالب

یک استراتژی معامله $\hat{H}$ را غالب (dominant) گوییم درصورتی که استراتژی معاملاتی دیگری، به نام $\tilde{H}$، موجود باشد که $\hat{V}_0 = \tilde{V}_0$ و برای هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $\hat{V}_1^*(\omega) > \tilde{V}_1(\omega)$. (هردو استراتژی با مقدار یکسانی از پول آغاز می‌شوند ولی آنکه غالب است در مقایسه با دیگری قطعاً با مقدار پول بیشتری خاتمه می‌یابد)

یکی از خصوصیاتی که یک مدل معقول و منطقی از نقطه نظر اقتصادی باید دارا باشد عدم وجود استراتژی غالب است. درصورت وجود استراتژی غالب در یک مدل، مثلاً سرمایه‌گذاران بدون تحمل هیچ ریسک از دست دادن ثروت در آن مدل، می‌توانند در یک معامله کسب سود کنند که مدلی نامعقول است.

اگر $H$ یک استراتژی معامله باشد که $V_0 = 0$ و برای هر $\omega \in \Omega$، $V_1(\omega) > 0$ آنگاه $H$ یک استراتژی غالب است. چون غلبه دارد بر استراتژی‌ای که با مقدار صفر از پول شروع می‌شود و سرمایه‌گذاری نمی‌کند. به عکس، اگر استراتژی معامله $\hat{H}$ بر استراتژی $\tilde{H}$ غلبه داشته باشد آنگاه با تعریف استراتژی $H = \hat{H} - \tilde{H}$، از خطی بودن $V$ نتیجه می‌شود $V_0 = \hat{V}_0 - \tilde{V}_0 = 0$ و این که $V_1 = \hat{V}_1(\omega) - \tilde{V}_1(\omega) > 0$ برای هر $\omega \in \Omega$. پس

(*) تنها و تنها وقتی استراتژی غالب وجود دارد که استراتژی معاملاتی موجود باشد که $V_0 = 0$ و درضمن برای هر $\omega \in \Omega$، $V_1(\omega) > 0$.

- تنها و تنها وقتی استراتژی غالب وجود دارد که استراتژی معامله‌ای موجود باشد که $V_0 < 0$ و همچنین $V_1(\omega) \geq 0$ برای هر $\omega \in \Omega$.

اثبات: فرض کنید که $H$ در شرایط (*) صدق کند. آنگاه از $B_t > 0$ داریم $V_0^* = 0$ و $V_1^*(\omega) > 0$ برای هر $\omega \in \Omega$، همچنین استراتژی $H$ به گونه‌ای است که برای هر $\omega \in \Omega$ داریم $G^*(\omega) > 0$. با قرار دادن $\hat{H}_n = H_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ و $\hat{H}_0 = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) - \delta$ که در آن $\delta = \min_{\omega} \hat{G}^*(\omega) > 0$ از تعریف $\hat{V}_t^*$، $\hat{V}_0^* = -\delta < 0$ و برای هر $\omega \in \Omega$؛ $\hat{V}_1^*(\omega) = \hat{V}_0^* + \hat{G}^*(\omega) = -\delta + \hat{G}(\omega) \geq 0$، پس $\hat{H}$ همان استراتژی غالب مورد نظر است.

برعکس: فرض کنیم استراتژی غالبی چون $\hat{H}$ وجود داشته باشد، با روند برگشتی استدلال بالا مشاهده می‌شود که استراتژی $H = (\hat{H}_1, \hat{H}_2, \ldots, \hat{H}_N)$ دارای این خاصیت است که برای هر $\omega \in \Omega$، $G^*(\omega) > 0$، پس با قرار دادن $H_n = \hat{H}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ و $H_0 = -\sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n S_n^*(0)$ برای استراتژی $H$، $V_0 = 0$ و برای هر $\omega \in \Omega$، $V_1(\omega) > 0$.

---

## - اندازه قیمت‌گذاری خطی (linear pricing measure):

وجود استراتژی غالب منجر به قیمت‌گذاری غیرمنطقی می‌شود (اگر $V_1(\omega)$ را به عنوان عایدی زمان $t = 1$ یک قرارداد وقتی که وضعیت $\omega$ اتفاق می‌افتد یا یک مطالبه در نظر بگیریم، $V_0$ به عنوان قیمت زمان $t = 0$ قرارداد، اگر استراتژی معاملاتی $\hat{H}$ بر استراتژی $\tilde{H}$ غلبه داشته باشد آنگاه مطالبه‌های مشروط $\hat{V}$ و $\tilde{V}$ قیمت‌های یکسان خواهند داشت حتی وقتی که مطالبه اول دارای پرداخت اکیداً بزرگتری در هر وضعیت $\omega$ باشد که با واقعیت سازگاری ندارد) زمانی قیمت‌گذاری مطالبات به طور منطقی سازگار خواهد بود که یک اندازه قیمت‌گذاری خطی موجود باشد یعنی (contingent claim)

یک بردار نامنفی $\pi = (\pi(\omega_1), \ldots, \pi(\omega_K))$ موجود باشد که برای هر استراتژی معاملاتی $H$ داشته باشیم

(ارزش ابتدایی تنزیل شده هر پرتفوی برابر است با امید تحت $\pi$ از ارزش تنزیل شده پایانی آن پرتفوی)

$$V_0^* = \sum_{\omega} \pi(\omega)\, V_1^*(\omega) = \sum_{\omega} \pi(\omega)\, V_1(\omega) / B_1(\omega)$$

در این وضعیت، دیگر قیمت‌گذاری غیرمنطقی مربوط به استراتژی‌های غالب رخ نمی‌دهد، هر مطالبه دارای قیمت منحصربه‌فرد است و مطالبه‌ای در هر وضعیت بیش از مطالبه‌ای دیگری پردازد دارای قیمت بیش‌تری در زمان $t = 0$ خواهد بود.

اگر یک اندازه قیمت‌گذاری خطی $\pi$ موجود باشد، به کمک تعریف چنین اندازه‌ای و تعریف $V_t^*$:

$$H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \left[ H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1)(\omega) \right] \quad *$$

با قرار دادن $H_1 = H_2 = \cdots = H_N = 0$ در رابطه اخیر، ملاحظه می‌شود که اندازه قیمت‌گذاری خطی در رابطه $\pi(\omega_1) + \cdots + \pi(\omega_K) = 1$ صدق می‌کند پس می‌توان $\pi$ را به عنوان یک اندازه احتمال بر فضای نمونه $\Omega$ در نظر گرفت. حال برای هر $n \in \{1, \ldots, N\}$ استراتژی معاملاتی را در نظر بگیرید که برای هر $i$ مخالف $n$، $H_i = 0$، پس بنابر فرمول بالا

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega)\, S_n^*(1)(\omega) \qquad n = 1, 2, \ldots, N \quad (**)$$

به عکس فرض کنیم که $\pi$ اندازه احتمالی بر $\Omega$ باشد که در $(**)$ صدق کند آنگاه رابطه * برقرار است و در نتیجه:

تنها و تنها وقتی بردار $\pi$ یک اندازه قیمت‌گذاری خطی است که یک اندازه احتمال بر $\Omega$ موجود باشد که در $(**)$ صدق کند.

← قیمت ابتدایی تنزیل شده هر ورقه بهادار برابر است با امید تحت $\pi$ از قیمت تنزیل شده نهایی.

- شرط لازم و کافی برای وجود اندازه قیمت‌گذاری خطی آن است که هیچ استراتژی معامله غالب وجود نداشته باشد. (نظریه وجود [illegible]

جمع بندی تا اینجا: مدل‌های بازار اوراق بهادار که وجود استراتژی‌های معامله غالب را مجاز می‌شمرند از نظر اقتصاد معقول نیستند. مدل‌هایی که فاقد استراتژی‌های غالب هستند چون با اندازه‌های قیمت‌گذاری خطی همراه هستند معقول به نظر می‌آیند. (در بازار اوراق بهادار می‌توان مدل‌هایی یافت که حتی کمتر معقول هستند)

- قانون قیمت واحد (law of one price): قانون قیمت واحد بر بازار اوراق بهادار برقرار است که نتوان دو استراتژی معاملاتی $\hat{H}$ و $\tilde{H}$ را یافت، به طوری که $\tilde{V}_0 < \hat{V}_0$ و برای هر $\omega \in \Omega$، $\hat{V}_1(\omega) = \tilde{V}_1(\omega)$. (با برقراری این قانون ابهامی درباره قیمت زمان $t=0$ مطالبات وجود ندارد) اگر نتوان دو استراتژی معاملاتی متمایز با پرداخت یکسان در زمان ۱ یافت آنگاه خودبخود قانون قیمت واحد برقرار است.

- اگر قانون قیمت واحد برقرار نباشد آنگاه استراتژی معامله‌ای غالب موجود است.

(اگر هیچ استراتژی معاملاتی غالب وجود نداشته باشد آنگاه قانون قیمت واحد برقرار است)

اثبات: $\hat{H}$ و $\tilde{H}$ به گونه‌ای باشند که $\tilde{V}_0^* < \hat{V}_0^*$ و $\hat{V}_1^* = \tilde{V}_1^*$، پس $\hat{G}^*(\omega) < \tilde{G}^*(\omega)$ برای $\omega \in \Omega$. با تعریف استراتژی معاملاتی $H$ به صورت $H_n = \tilde{H}_n - \hat{H}_n$ $(n=1,\dots,N)$، برای هر $\omega \in \Omega$، $G^*(\omega) > 0$. بالاخره با قرار دادن $H_0 = -\sum H_n S_n^*(0)$ نتیجه می‌شود $V_0 = 0$ و $V_1(\omega) > 0$ برای هر $\omega \in \Omega$.

عکس لم بالا لزومی ندارد که برقرار باشد. (می‌توان استراتژی معاملاتی غالبی برای مدل داشت که در قانون قیمت واحد صدق کند)، به بیان، عدم برقراری قانون قیمت واحد بدتر از داشتن استراتژی معاملات غالب است.