$t = 0$ بسته می‌شود تلقی کرد. فروشنده متعهد می‌شود که به خریدار مبلغ $X(\omega)$ را در زمان $t = 1$ بپردازد اگر که $\omega \in \Omega$ حالتی باشد که در عمل اتفاق می‌افتد. پس، وقتی که در زمان $t = 0$ به آن نگاه می‌کنیم، پرداخت $X$ متغیری تصادفی است، و مسئلهٔ موردعلاقه آن است که ارزش زمان $t = 0$ این پرداخت را بیابیم. به‌عبارت دیگر، قیمت منصفانه‌ای که خریدار باید در زمان $t = 0$ به فروشنده بپردازد تا هر دو طرف نسبت به قرارداد راضی باشند چیست؟

حال ممکن است که تصور شود که قیمت یک مطالبهٔ مشروط به ترجیحات ریسک و توابع مطلوبیت خریدار و فروشنده بستگی دارد، اما در بسیاری مواقع این‌طور نیست. چنانکه از استدلال‌های نظریهٔ **قیمت‌گذاری آربیتراژ**[1] برمی‌آید غالباً یک قیمت منحصر به‌فرد و درست در زمان $t = 0$ از مطالبهٔ مشروط وجود دارد، قیمتی که به ترجیحات ریسک طرفینی که مطالبه را معامله می‌کنند بستگی ندارد. استدلال بدین نحو است: مطالبهٔ مشروط $X$ را **دست‌یافتنی**[2] یا **بازارپذیر**[3] می‌خوانند در صورتی که استراتژی معاملهٔ $H$، که به آن **پرتفوی بازساز**[4] گفته می‌شود، موجود باشد به‌طوری که $V_1 = X$. در این صورت گفته می‌شود که $H$ مطالبهٔ $X$ را **تولید می‌کند**[5]. حال فرض کنیم که قیمت $p$ زمان $t = 0$ از $X$ به‌گونه‌ای است که $V_0 < p$. آنگاه فردی هوشمند قرارداد مطالبه را در زمان $t = 0$ به قیمت $p$ می‌فروشد، سپس استراتژی معاملهٔ $H$ را که برایش $V_0$ هزینه برمی‌دارد به‌کار می‌بندد، و تفاضل $p - V_0$ را به جیب می‌زند. این فرد سودی بدون خطر را کسب کرده است، چرا که در زمان $t = 1$ قیمت $V_1$ از پرتفوی متناظر با $H$ دقیقاً مساوی با تعهد $X$ مطالبهٔ مشروط در هر وضعیت ممکن است. به‌عبارت دیگر، اگر $V_0 < p$، آنگاه این فرد هوشمند سود $p - V_0$ را با سرمایه‌گذاری در پرتفویی به‌دست می‌آورد که مبلغ دقیق تسویه تعهد مطالبهٔ مشروط را به‌دست می‌دهد.

مشابهاً، اگر $p < V_0$، آنگاه فرد هوشمند استراتژی معاملاتی $-H$ را به‌کار می‌بندد، به‌خاطر آن مبلغ $V_0$ را در زمان $t = 0$ کسب می‌کند، و مطالبهٔ مشروط را به مبلغ $p$ می‌خرد، و به‌واسطهٔ آن سود بدون ریسک $V_0 - p$ را کسب می‌کند. در زمان $t = 1$ مبلغ $X$ ای که به‌دست می‌آورد دقیقاً برابر است با مبلغ لازم برای تسویه تعهد $V_1$ متناظر با استراتژی معاملاتی $-H$. مجدداً، در حالت $p < V_0$، این فرد هوشمند می‌تواند سود بدون ریسک $V_0 - p$ را برای خود کسب کند.

اگر $p = V_0$، آنگاه ظاهراً نمی‌توان $H$ را برای تولید سود بدون خطر به‌کار برد. پس آیا این به آن معنی است که $V_0$ قیمت درست $X$ است؟ ضرورتاً این‌طور نیست، چه فرض کنید استراتژی معاملاتی دومی،

1. arbitrage pricing theory 2. attainable 3. marketable 4. replicating portfolio
5. generates

ـلا $\hat{H}$، موجود باشد که $\hat{V}_1 = X$ ولی $\hat{V}_0 \neq V_0$. آنگاه حتی در صورت $V_0 = p$، می‌توان $\hat{H}$ و ـــلال بالا را به‌کار برد تا سود بدون ریسک کسب کرد، که این باعث قیمت متفاوت $\hat{V}_0$ می‌شود. ـیـ، مشکل در اینجا این است که قانون قیمت واحد برقرار نیست. پس برای آنکه $V_0$ قیمت منطقی منحصر به‌فرد زمان $t = 0$ از $X$ باشد، لازم است که برقراری قانون قیمت واحد را فرض بگیریم. در این حالت می‌گوییم که $V_0$ قیمت $X$ است که با اتکاء بر نظریهٔ قیمت‌گذاری آربیتراژ به‌دست آمده است.

همچنانکه در بخش ۲-۱ توضیح داده شد، اگر فرصتی برای آربیتراژ نباشد، آنگاه هیچ استراتژی معاملاتی غالب وجود ندارد، و اگر استراتژی معاملاتی غالب وجود نداشته باشد، آنگاه قانون قیمت واحد برقرار است. پس از (۱۶-۱) وجود یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک قانون قیمت واحد را نتیجه می‌دهد. این موضوع را می‌توان به روش دیگر مستقیماً از محاسبهٔ مهم زیر هم به‌دست آورد:

(۱۸-۱) اگر $Q$ یک اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک دلخواه باشد، آنگاه برای هر استراتژی معاملاتی $H$ داریم

$$V_0 = V_0^* = E_Q V_0^* = E_Q[V_1^* - G^*] = E_Q V_1^* - E_Q\left[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\right]$$
$$= E_Q V_1^* - \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q[\Delta S_n^*] = E_Q V_1^* - 0 = E_Q V_1^* = E_Q\left[\frac{V_1}{B_1}\right]$$

به‌عبارت دیگر، مقدار انتظاری تحت $Q$ از قیمت تنزیل شده زمان $t = 1$ هر پرتفوی مساوی قیمت ابتدایی‌اش است. پس اگر احتمال مثبتی باشد که ارزش پرتفوی بالا رود، آنگاه باید همچنین احتمال مثبتی باشد که ارزش آن پایین رود، و به‌عکس. به‌علاوه هیچ امکانی وجود ندارد که دو استراتژی معاملاتی $H$ و $\hat{H}$ را یافت که در $\hat{V}_1 = V_1$ و $\hat{V}_0 \neq V_0$ صدق کنند، لذا قانون قیمت واحد باید برقرار باشد.

به‌علاوه این را باید اشاره کنیم که محاسبه در (۱۸-۱) به انتخاب $Q$ بستگی ندارد، چراکه $V_1^*$ ارزش تنزیل شدهٔ زمان $t = 1$ از پرتفوی یک استراتژی معاملاتی است. به‌عبارت دیگر، در مدلی که دو یا تعدادی بیشتر از اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک وجود دارد، $E_Q V_1^*$ نسبت به چنین $Q$ هایی ثابت است.

با استفاده از استدلال‌هایی که در ابتدای این بخش آمدند، ایدهٔ **قیمت‌گذاری** مهم زیر را برای مطالبات مشروط داریم:

(۱-۱۹) اگر قانون قیمت واحد برقرار باشد، آنگاه ارزش زمان $t = 0$ از یک مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی $X$ برابر است با $V_0 = H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)$، که در آن $H$ استراتژی معاملاتی است که $X$ را تولید می‌کند.

در صورت وجود فرض قوی‌تر عدم‌وجود فرصت آربیتراژ نتیجهٔ مهیج زیر را داریم:

(۱-۲۰) **اصل ارزش‌گذاری ریسک خنثایی**: اگر مدل یک دوره‌ای عاری از آربیتراژ باشد، آنگاه ارزش زمان $t = 0$ یک مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی $X$ عبارت است از $E_Q[X/B_1]$، که در آن $Q$ یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک است.

این مطلب از موارد (۱-۲)، (۱-۱۸)، (۱-۱۹)، و واقعیت $B_0 = 1$ نتیجه می‌شود. حال به ذکر چندین مثال می‌پردازیم.

**مثال ۱-۱ (ادامه)** فرض کنیم $r = \frac{1}{9}$، $X(\omega_1) = 7$، و $X(\omega_2) = 2$. آنگاه مشروط به دست‌یافتنی بودن $X$، ارزش زمان $t = 0$ از $X$ عبارت است از

$$E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{10}\right)(7) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{10}\right)(2) = 4{,}05$$

چگونه می‌توان از دست‌یافتنی بودن $X$ مطمئن شد؟ یک راه سعی در یافتن استراتژی معاملاتی $H$ است که $X$ را تولید کند. این را با حل کردن

$$\frac{X}{B_1} = V_1^* = V_0^* + G^* = 4{,}05 + H_1 \Delta S_1^*$$

انجام می‌دهیم. در اینجا یک نامعین $H_1$ همراه با دو معادله برای دو $\omega$ داریم، اما هر دو معادله منجر به جواب $H_1 = 2{,}25$ می‌شوند. برای تعیین $H_0$ می‌توان معادلهٔ

$$4{,}05 = V_0 = H_0 + H_1 S_1 = H_0 + (2{,}25)(5)$$

را حل کرد تا به‌دست آید $H_0 = -7{,}2$.

در مجموع، مطالبهٔ مشروط $X$ دست‌یافتنی است. برای تولید آن با مقدار ۴٫۰۵ شروع کرده، مقدار ۷٫۲ را با نرخ بدون ریسک $r = \frac{1}{9}$ قرض می‌گیرید، و مجموع $4{,}05 + 7{,}2 = 11{,}25$ را برای

... تعداد $۲٫۲۵ = ۵ \div ۱۱٫۲۵$ سهم از دارایی ریسکی استفاده می‌کنید. در زمان $t = ۱$ مقدار ... $(۷٫۲)(\frac{۱}{۲})$ را برای تسویه وام می‌پردازید. مقدار پول باقی‌مانده در پرتفوی به $\omega$ بستگی دارد: ... این مقدار برابر است با $۷ = ۸ - (\frac{۲۰}{۳})(۲٫۲۵) = V_۱$، در حالی که در حالت $\omega_۲$ ... است با $۲ = ۸ - (\frac{۴۰}{۹})(۲٫۲۵) = V_۱$. اگر ارزش زمان $t = ۰$ این مطالبهٔ مشروط ... ۴٫۰۵ باشد، آنگاه می‌توان این استراتژی معاملاتی را به‌گونه‌ای که در ابتدای بخش بحث شد ... سودی بدون ریسک کسب کرد. ■

... ۱-۷ برای یک مدل اوراق بهادار دلخواه و برای $\hat{\omega} \in \Omega$، برای

$$X(\omega) = \begin{cases} ۱, & \omega = \hat{\omega} \\ ۰, & \omega \neq \hat{\omega} \end{cases}$$

به قیمت زمان $t = ۰$ برای $X$ رهنمون می‌شویم (در صورتی که $X$ دست‌یافتنی باشد)

$$E_Q\left[\frac{X}{B_۱}\right] = \sum_{\omega} Q(\omega)\frac{X(\omega)}{B_۱(\omega)} = \frac{Q(\hat{\omega})}{B_۱(\hat{\omega})}$$

به این دلیل است که $\frac{Q(\hat{\omega})}{B_۱(\hat{\omega})}$ را گاهی **قیمت وضعیت**[1] $\hat{\omega} \in \Omega$ می‌نامند. لذا قیمت زمان $t = ۰$ از یک مطالبهٔ دست‌یافتنی برابر است با مجموع وزن‌دار از تمامی حالت‌های پرداخت تحت $X$، که در آن وزن‌ها مقادیر قیمت وضعیتی هستند. ■

**مثال ۸-۱ اختیار خرید:** فرض کنید $N = ۱$ و $X$ دارای شکل زیر باشد

$$X = (S_۱ - e)^+ = \max\{۰, S_۱ - e\}$$

که در آن $e$ عددی از قبل تعیین شده است که به آن **قیمت اعمال**[2] یا **قیمت توافقی**[3] می‌گویند. پس $X$ مطالبهٔ مشروط متناظر با حق خرید ورقهٔ ریسکی در زمان $t = ۱$ به‌ازای مبلغ $e$ است. اگر اتفاق افتد که $e \leqslant S_۱$، آنگاه در زمان $t = ۱$ این حق به اندازهٔ تفاضل $S_۱ - e$ می‌ارزد، پس این اختیار منطقاً به اجرا گذاشته می‌شود. از طرف دیگر، اگر $S_۱ \leqslant e$، آنگاه در زمان $t = ۱$ این حق

1. state price 2. exercise price 3. strike price

... زیر را برای مطالبات

... ز یک مطالبهٔ مشروط
... که در آن $H$ استراتژی

... ریم:

... از آربیتراژ باشد، آنگاه
... ت از $E_Q[X/B_۱]$،

... شود. حال به ذکر

... ط به دست‌یافتنی

$$E_Q\left[\frac{X}{B_۱}\right] = \ldots$$

... ژی معاملاتی $H$

$$\frac{X}{B_۱} = V_۱^* = \ldots$$

... و معادله منجر به

$$۴٫۰۵ = V_۰ \ldots$$

... روع کرده، مقدار
... - ۴٫۰۵ را برای

چیزی نمی‌ارزد، و بنابراین اختیار به اجرا گذاشته نمی‌شود. اگر $X$ دست‌یافتنی باشد، آنگاه قیمت زمان $t = 0$ آن عبارت است از

$$E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] = \sum_{\omega \in \Omega'} Q(\omega)\frac{[S_1(\omega) - e]}{B_1(\omega)}$$

که در آن $\Omega' \equiv \{\omega \in \Omega : S_1(\omega) \geqslant e\}$. ■

**مثال ۱-۱ (ادامه)** برای $r = \frac{1}{9}$ و $e = 5$، قیمت زمان $t = 1$ اختیار خرید برابر است با

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \omega = \omega_1 \\ 0, & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

پس اگر $X$ دست‌یافتنی باشد، آنگاه ارزش زمان $t = 0$ آن عبارت است از

$$E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}75$$

برای بررسی اینکه $X$ دست‌یافتنی است، تلاش می‌کنیم که استراتژی معامله‌ای را محاسبه کنیم که $X$ را تولید کند. دستگاه دو معامله‌ای (یک معادله برای هر وضعیت) زیر را

$$V_1 = H_0 B_1 + H_1 S_1 = X$$

برای دو مجهول حل کرده و به‌دست می‌آوریم $H_1 = 0{,}75$ و $H_0 = -3$. پس در واقع، قیمت زمان $t = 0$ از $X$ عبارت است از $V_0 = H_0 + H_1 S_0 = -3 + (0{,}75)(5) = 0{,}75$. ■

**مثال ۱-۹ اختیار فروش:** فرض کنید $N = 1$ و فرض کنید $X$ به شکل

$$X = (e - S_1)^+ = \max\{0, e - S_1\}$$

باشد. آنگاه $X$ مطالبهٔ مشروطی است که به دارنده آن این حق را می‌دهد که ورقهٔ بهادار ریسکی را در زمان $t = 1$ به قیمت $e$ بفروشد. این اختیار منطقاً تنها و تنها وقتی به اجرا در می‌آید که $S_1 < e$. ■

**مثال ۲-۱ (ادامه)**
و تنها وقتی بازارپذیر
یعنی، دستگاه معاد

چون سه معادله ب
معادلهٔ سوم استنـ د

مطالبهٔ مشروط تـ
اگر

(۲۱-۱)

این مثال یک اصـ
نسبت به ریسک
بخش بعد به تفصیـ

**مسئلهٔ ۱۲-۱** برای
معاملاتی‌ای این مـ
**مسئلهٔ ۱۳-۱** دو
فرض کنید $e$ و $p$
قیمت توافقی $e$ هـ

**مثال ۲-۱ (ادامه)** یک مطالبهٔ مشروط دلخواه $X = (X_1, X_2, X_3)$ را در نظر بگیرید. این مطالبه تنها و تنها وقتی بازارپذیری دارد که زوج $H_0$ و $H_1$ از اعداد موجود باشند که $X = H_0 B_1 + H_1 S_1$، یعنی، دستگاه معادلات زیر جواب داشته باشد:

$$\omega_1 : \left(\frac{10}{9}\right) H_0 + \left(\frac{20}{3}\right) H_1 = X_1$$

$$\omega_2 : \left(\frac{10}{9}\right) H_0 + \left(\frac{40}{9}\right) H_1 = X_2$$

$$\omega_3 : \left(\frac{10}{9}\right) H_0 + \left(\frac{30}{9}\right) H_1 = X_3$$

چون سه معادله با دو مجهول داریم، شاید که جوابی وجود نداشته باشد. این را بررسی می‌کنیم. از معادلهٔ سوم استفاده کرده تا در معادلات اول و دوم $H_0$ را حذف کنیم و به‌دست آوریم

$$H_1 = \frac{3X_1 - 3X_3}{10} \quad \text{و} \quad H_1 = \frac{9X_2 - 9X_3}{10}$$

مطالبهٔ مشروط تنها و تنها وقتی دست‌یافتنی است که دو مقدار $H_1$ مساوی باشند، یعنی، اگر و تنها اگر

$$X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0 \tag{1-21}$$

این مثال یک اصل کلی را تشریح می‌کند: زمانی که مدل تحت بررسی دارای چندین اندازه خنثی نسبت به ریسک باشد، آنگاه برخی مطالبات مشروط هستند که دست‌یافتنی نیستند، این اصل در بخش بعد به تفصیل بررسی می‌شود. ■

---

**مسئلهٔ ۱۲-۱** برای مثال ۱-۱ با $r = \frac{1}{9}$، قیمت اختیار فروش به‌ازای $e = 5$ چیست؟ چه استراتژی معاملاتی‌ای این مطالبهٔ مشروط را تولید می‌کند؟

**مسئلهٔ ۱۳-۱ دوگانگی اختیار فروش ـ اختیار خرید:** فرض کنید که نرخ بهرهٔ $r$ ثابت است، و فرض کنید $c$ و $p$ به‌ترتیب عبارت باشند از قیمت‌های اختیار خرید و اختیار فروش، که هر دو دارای قیمت توافقی $e$ هستند. نشان دهید که یا هر دو بازارپذیری دارند یا اینکه هیچ کدام بازارپذیری ندارند.

با استفاده از ارزش‌گذاری ریسک خنثایی نشان دهید که در حالت اول داریم

$$c - p = S_0 - \frac{e}{1 + r}.$$

## ۱-۵ بازارهای کامل و ناقص

در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم که یک اندازهٔ خنثی نسبت به ریسک وجود دارد، و البته از وجود چنین اندازه‌ای نتیجه نمی‌شود که می‌توان اصل ارزش‌گذاری ریسک خنثایی را به‌کار برد تا قیمت زمان $t = 0$ یک مطالبهٔ مشروط را محاسبه کرد. در واقع، مشکل در آن است که احتمالاً مطالبهٔ مشروط بازارپذیری ندارد، و در آن صورت واضح نیست که قیمت زمان $t = 0$ چه باید باشد. به‌خصوص، هیچ دلیلی برای اطمینان از درست بودن $E_Q[\frac{X}{B_1}]$ برای قیمت زمان $t = 0$ وجود ندارد. پس احتیاج به روش مناسب برای بررسی قابل‌ارزیابی بودن یک مطالبهٔ مشروط داریم. چنانکه در مثال ۱-۱ از بخش قبل توضیح داده شد، یک روش آن است که با حل یک دستگاه معادلات یک استراتژی معاملاتی تولیدکننده را محاسبه کنیم. تنها و تنها وقتی جوابی برای چنین دستگاهی وجود دارد که مطالبهٔ مشروط بازارپذیر باشد. اما روش‌های دیگری هم وجود دارند.

در صورتی که هر مطالبهٔ مشروط $X$ توسط یک استراتژی معاملاتی تولید شود، مدل را **کامل**[1] می‌خوانیم. در غیر این صورت، مدل را **ناقص**[2] می‌نامیم. چنانکه معلوم خواهد شد، روش‌های ساده‌ای برای بررسی کامل بودن یک مدل وجود دارد. یک راه این است که بررسی کنیم آیا دستگاه معادلاتی که در بالا از آن صحبت شد همواره جواب دارد.

**(۱-۲۲)** فرض کنید که فرصتی برای آربیتراژ نباشد. آنگاه مدل تنها و تنها وقتی کامل است که تعداد اعضای $\Omega$ مساوی تعداد بردارهای مستقل خطی در $\{B_1, S_1(1), \ldots, S_n(1)\}$ باشد.

برای دیدن این موضوع، ماتریس $A$ از ابعاد $K \times (N + 1)$ را به‌صورت

$$A = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \cdots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & \cdots & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \cdots & S_N(1)(\omega_K) \end{bmatrix}$$

1. complete 2. incomplete

تعریف و بردارهای ستونی $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N)'$ و $X = (X_1, \ldots, X_K)'$ را در نظر بگیرید. آنگاه مدل تنها و تنها وقتی کامل است که دستگاه $AH = X$ برای هر $X$ دارای یک جواب $\bar{H}$ باشد. با استفاده از جبر خطی، این موضوع آخر تنها و تنها وقتی برقرار است که ماتریس $A$ رتبهٔ $K$ داشته باشد، یعنی، این ماتریس دارای $K$ ستون مستقل خطی باشد.

**مثال ۱-۱ (ادامه)** ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{20}{3} \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \end{bmatrix}$$

دو سطر مستقل خطی دارد، پس مدل کامل است. ■

**مثال ۱-۱۰** مثال ۱-۱ را بگیرید و یک ورقهٔ ریسکی دومی با مشخصات $S_2(0) = 54$، $S_2(1)(\omega_1) = 70$، و $S_2(1)(\omega_2) = 50$ در نظر بگیرید. توجه کنید که $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ هنوز یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک است چراکه $(\frac{1}{2})(\frac{9}{10})(70) + (\frac{1}{2})(\frac{9}{10})(50) = 54$. اکنون داریم

$$A = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{20}{3} & 70 \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} & 50 \end{bmatrix}$$

اما این ماتریس رتبهٔ ۲ دارد. پس این مدل توسعه یافته هنوز کامل است، گرچه ورقه‌های ریسکی وابسته هستند. ■

**مثال ۱-۲ (ادامه)** ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{20}{3} \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

رتبهٔ دو دارد، حال آنکه $K = 3$، پس این مدل ناقص است. قبلاً دیدیم که اندازه‌های خنثی نسبت به ریسک به شکل $Q = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda)$ هستند، که در آن $\lambda$ عدد دلخواهی است که در $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{2}{3}$ صدق می‌کند. یکی از این اندازه‌ها را اختیار کرده و از فرمول اصل ارزش‌گذاری ریسک

خنثایی (۱-۲۰) استفاده می‌کنیم تا به‌دست آید:

$$E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] = \lambda\left(\frac{9}{10}\right)X_1 + (2 - 3\lambda)\left(\frac{9}{10}\right)X_2 + (-1 + 2\lambda)\left(\frac{9}{10}\right)X_3$$

اگر $X$ قابل‌ارزیابی باشد، آنگاه این مقدار برای تمامی $\lambda$ها یک چیز را به‌دست می‌دهد چرا که باید تحت استراتژی معاملاتی تولیدکننده مساوی با $V_0$ باشد. توجه کنید که این مقدار تنها و تنها وقتی ثابت است که (۱-۲۱) برقرار باشد. به‌علاوه از بحث (۱-۲۱) به‌خاطر می‌آوریم که یک مطالبه مشروط تنها و تنها وقتی بازارپذیر است که (۱-۲۱) برقرار باشد. با کنار هم قرار دادن اینها، ملاحظه می‌شود که مطالبهٔ مشروط این مدل تنها و تنها زمانی بازارپذیر است که تحت تمامی اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک عبارت $E_Q[\frac{X}{B_1}]$ یک چیز را به‌دست دهد. واقعیت این است که این شرط لازم و کافی در حالت کلی برقرار است. ■

چنانکه قبلاً گفتیم، در تمامی این بخش بر این فرض خواهیم بود که $\mathbb{M} \neq \emptyset$، که در آن $\mathbb{M}$ مجموعهٔ تمامی اندازه‌های احتمال خنثی نسبت به ریسک است. حال اگر مطالبهٔ مشروط $X$ دست‌یافتنی باشد، آنگاه $E_Q[X/B_1]$ برای تمامی $Q \in \mathbb{M}$ ثابت است. چنانکه قبلاً در رابطه با (۱-۱۸) بحث شد، این به آن دلیل است که برای هر $Q \in \mathbb{M}$ داریم $V_0 = E_Q[X/B_1]$، که در آن $V_0$ ارزش ابتدایی پرتفوی بازساز است.

برای اثبات در جهت عکس، کافی است تحت این فرض که $X$ دست‌یافتنی نباشد نشان دهیم که $E_Q[X/B_1]$ نمی‌تواند برای تمامی $Q \in \mathbb{M}$ یک مقدار به‌دست دهد. ماتریس $A$ از ابعاد $(N+1) \times K$، بردار ستونی $(N+1)$ ـ بعدی $H$، و بردار ستونی $K$ ـ بعدی $X$ را که در رابطه با (۱-۲۲) توصیف شدند در نظر بگیرید. اگر $X$ دست‌یافتنی نباشد، آنگاه جواب $H$ برای دستگاه $AH = X$ وجود ندارد. با استفاده از شقی اصلاح شده از لم فارکاس (مسئلهٔ ۱-۱۱)، بردار سطری $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_K)$ به‌دست می‌آید که در

$$\pi A = 0 \quad , \quad \pi X > 0$$

صدق می‌کند. فرض کنید $\hat{Q} \in \mathbb{M}$ دلخواه بوده، و فرض کنید که عدد $\lambda > 0$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد تا در رابطه زیر صدق کند

$$Q(\omega_k) \equiv \hat{Q}(\omega_k) + \lambda \pi_k B_1(\omega_k) > 0, \qquad k = 1, \ldots, K$$

چون ضرب $\pi$ در ستون صفرام ماتریس $A$ صفر است، نتیجه می‌شود که کمیت $Q$ که اینک معرفی شد یک اندازه احتمال است که به هر وضعیت $\omega \in \Omega$ احتمال مثبت را نسبت می‌دهد. به‌علاوه، برای هر فرایند قیمت تنزیل شده $S_n^*$ داریم

$$\begin{aligned}
E_Q S_n^*(1) &= \sum Q(\omega_k) S_n(1, \omega_k)/B_1(\omega_k) \\
&= \sum \hat{Q}(\omega_k) S_n(1, \omega_k)/B_1(\omega_k) + \lambda \sum \pi_k S_n(1, \omega_k) \\
&= \sum \hat{Q}(\omega_k) S_n^*(1, \omega_k)
\end{aligned}$$

که در آن از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که حاصل‌ضرب $\pi$ در $n$ ـ امین ستون $A$ صفر است. اما داریم $\hat{Q} \in \mathbb{M}$، پس $\sum \hat{Q}(\omega_k) S_n^*(1)(\omega_k) = S_n^*(0)$، که از این بابت ملاحظه می‌کنیم که $Q \in \mathbb{M}$. حال نشان می‌دهیم که ارزش مورد انتظار $X/B_1$ تحت $Q$ متفاوت است از ارزش مورد انتظارش تحت $\hat{Q}$. در واقع قرار دهید $\delta \equiv \pi X$ و توجه کنید که $\delta > 0$. آنگاه

$$\begin{aligned}
E_Q[X/B_1] &= \sum Q(\omega_k) X(\omega_k)/B_1(\omega_k) \\
&= \sum \hat{Q}(\omega_k) X(\omega_k)/B_1(\omega_k) + \lambda \sum \pi_k X(\omega_k) \\
&= E_{\hat{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right] + \lambda\delta
\end{aligned}$$

به عبارت دیگر، چون $X$ دست‌یافتنی نیست به‌دست می‌آوریم $E_Q[X/B_1] \neq E_{\hat{Q}}[X/B_1]$؛ پس در جمع‌بندی، نتیجهٔ مهم زیر را داریم.

**(۱-۲۳)** مطالبهٔ مشروط $X$ تنها و تنها وقتی دست‌یافتنی است که مقادیر $E_Q[X/B_1]$ برای تمامی $Q \in \mathbb{M}$ مساوی باشند.

ملاحظه کنید که اگر $\mathbb{M}$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد و $X$ مطالبهٔ مشروط دلخواهی باشد، آنگاه $E_Q[X/B_1]$ برای تمامی $Q \in \mathbb{M}$ مساوی هستند، که در آن صورت $X$ دست‌یافتنی است و مدل کامل است. از طرف دیگر، فرض کنید که هر مطالبهٔ مشروط $X$ دست‌یافتنی باشد اما $\mathbb{M}$ دو اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک متفاوت داشته باشد، مثلاً $Q$ و $\hat{Q}$. در این صورت برخی حالت‌های $\omega_k$ باید وجود داشته باشد که $Q(\omega_k) \neq \hat{Q}(\omega_k)$، سپس مطالبهٔ مشروط تعریف شده با

$$X(\omega) = \begin{cases} B_1(\omega_k) & \omega = \omega_k \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. آنگاه

$$E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] = Q(\omega_k) \neq \hat{Q}(\omega_k) = E_{\hat{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right]$$

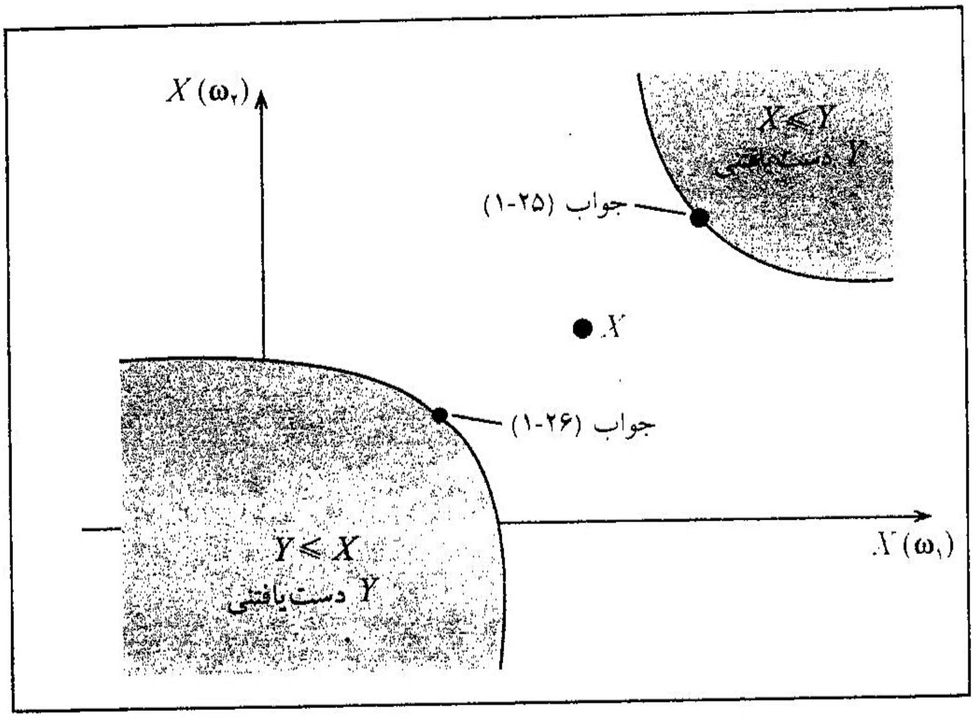
اما این متناقض با (۱-۲۳) است، که می‌گوید که اگر $X$ دست‌یافتنی باشد، آنگاه $E_Q[X/B_1]$ برای تمامی $Q \in \mathbb{M}$ یک چیز می‌شود. بنابراین اگر مدل کامل باشد، آنگاه $\mathbb{M}$ نمی‌تواند بیش از یک عضو داشته باشد. این مشاهدات را به‌صورت زیر ترکیب می‌کنیم.

(۱-۲۴) مدل تنها و تنها وقتی کامل است که $\mathbb{M}$ تنها از یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک تشکیل یافته باشد.

در جمع‌بندی موضوعات، اگر مدل کامل باشد آنگاه می‌دانیم که چگونه باید مطالبات مشروط را قیمت‌گذاری کرد. به‌علاوه، اگر مدل کامل نباشد آنگاه می‌دانیم که چگونه برخی از مطالبات مشروط را قیمت‌گذاری کنیم، یعنی، آن‌هایی که دست‌یافتنی باشند. اما در مورد مطالبات دست‌نیافتنی در بازار ناقص چطور؟ نمی‌توان قیمت زمان $t = 0$ چنین مطالبه‌ای را تعیین کرد، اما واقعیت این است که حداقل می‌توان بازه‌ای را شناسایی کرد که یک قیمت معقول منصفانه در آنجا قرار گیرد.
در ادامهٔ این بخش مدلی ناقص در نظر می‌گیریم و توجه خود را به مطالبهٔ مشروط دلخواهی معطوف می‌کنیم که دست‌یافتنی نیست. کمیت

$$V_+(X) \equiv \inf\left\{E_Q\left[\frac{Y}{B_1}\right] \quad : \quad X \leqslant Y \text{ و } Y \text{ دست‌یافتنی است}\right\}$$

را در نظر بگیرید و در تمامی این بحث به شکل ۳-۱ مراجعه کنید. انتخاب خاص $Q \in \mathbb{M}$ در اینجا اهمیتی ندارد چرا که تنها برای محاسبهٔ قیمت مطالبات مشروط دست‌یافتنی به‌کار می‌رود. توجه کنیم که برای تمامی مقادیر $\lambda$ مطالبهٔ مشروط $\lambda B_1$ دست‌یافتنی است و اینکه برای مقادیر بزرگ $\lambda$ داریم $X \leqslant \lambda B_1$؛ پس $V_+(X)$ خوش‌تعریف و متناهی است. همچنین توجه کنیم که $V_+(X)$ از پایین به $\sup\{E_Q[X/B_1] \ : \ Q \in \mathbb{M}\}$ محدود است.
کمیت $V_+(X)$ از آن جهت مهم است که کران بالای خوبی برای قیمت منصفانهٔ $X$ است. این موضوع از یک استدلال متکی به آربیتراژ مشابه آنچه در بخش قبل آمد نتیجه می‌شود. اگر $X$ می‌توانست برای قیمت بیشتری معامله شود، مثلاً برای قیمت $p > V_+(X)$، آنگاه برای هر مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی صادق در $X \leqslant Y$ می‌توانستیم از استراتژی معاملاتی که $Y$ را بازسازی می‌کند استفاده




شکل ۳-۱

کنیم و به‌دست آوریم $V_+(X) \leqslant E_Q[Y/B_1] < p$. به‌ویژه منطقی می‌بود که کسی $X$ را در زمان $t = 0$ بفروشد، و از عواید آن استفاده کرده و پرتفوی بازساز $Y$ را به قیمت $E_Q[Y/B_1]$ بخرد، و تفاضل $p - E_Q[Y/B_1]$ را به‌عنوان سود بدون ریسک به جیب بزند. در زمان $t = 1$ ارزش پرتفوی $Y$ به اندازه‌ای است که بتواند تعهد $X$ از مطالبهٔ مشروط را پوشش دهد. پس $V_+(X)$ بهای ارزان‌ترین پرتفویی است که می‌توان برای پوشش دادن فروش مطالبهٔ مشروط $X$ به‌کار برد.

مطالبهٔ مشروط دست‌نیافتنی $X$ را نمی‌توان به قیمتی بالاتر از $V_+(X)$ معامله کرد، چه درغیر این صورت فرصت آربیتراژ وجود خواهد داشت. مشابهاً، این مطالبهٔ مشروط را نمی‌توان به قیمتی کمتر از

$$V_-(X) \equiv \sup\left\{E_Q\left[\frac{Y}{B_1}\right] : \text{دست‌یافتنی است و } Y \leqslant X \text{ و } Y\right\}$$

معامله کرد. همچون $V_+(X)$، کمیت $V_-(X)$ خوش‌تعریف و متناهی است و داریم

$$V_-(X) \leqslant \inf\{E_Q[X/B_1] : Q \in \mathbb{M}\}$$

قیمت (یا قیمت‌های) منصفانهٔ $X$ باید در بازهٔ $[V_-(X), V_+(X)]$ قرار داشته باشد. بنابراین علاقه‌مند هستیم که $V_+(X)$ را و هر مطالبهٔ مشروط $X \leqslant Y$ را که در $V_+(X) = E_Q[Y/B_۱]$ صدق کند بیابیم، و مشابهاً در مورد $V_-(X)$ عمل کنیم.
برنامهٔ خطی زیر را در نظر بگیرید

(۱-۲۵)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \lambda \\ \text{subject to} \quad & Y \geqslant X \\ & U - \frac{Y}{B_۱} = ۰ \\ & \lambda - U \cdot Q_۱ = ۰ \\ & \vdots \qquad \vdots \\ & \lambda - U \cdot Q_J = ۰ \\ & \lambda \in \mathbb{R},\ Y \in \mathbb{R}^K,\ U \in \mathbb{R}^K \end{aligned}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که $\mathbb{W}^\perp$ از بُعد $J$ بوده، و بردارهای مستقل خطی $Q_j \in \mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$، $j = ۱, \ldots, J$، پایه‌ای برای $\mathbb{W}^\perp$ هستند. این به آن معنی است که زیرفضای $\mathbb{W}$ متشکل از عواید تنزیل یافته دارای بعد $K - J$ است و به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^K : X \cdot Q_j = ۰, j = ۱, \ldots, J \quad \text{برای}\}$$

حال فرض کنید که $Y$ یک مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی باشد که ارزش آن در زمان $t = ۰$ برابر $\lambda$ است، و قرار دهید $U = Y/B_۱$. به دلیل $V_۱^* = V_۰^* + G^*$، این جمله معادل است با $U - \lambda e \in \mathbb{W}$ و $U = Y/B_۱$ که در آن $e$ بردار ستونی است که همهٔ مؤلفه‌هایش 1 هستند. اما برای هر $j$ داریم $e \cdot Q_j = ۱$، پس این جمله به نوبهٔ خود معادل است با $U = Y/B_۱$ و $U \cdot Q_j - \lambda = ۰$ برای $j = ۱, \ldots, J$. پس ناحیهٔ موجه برنامهٔ خطی (۱-۲۵) را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ تمامی مطالبات مشروط دست‌یافتنی $Y$ تلقی کرد که $X \leqslant Y$. نتیجه می‌شود که اگر $\lambda$ و $Y$ بخشی از جواب بهینهٔ این برنامهٔ خطی باشند، آنگاه $\lambda = V_+(X)$ و $Y$ یک مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی است که $X \leqslant Y$ و ارزش زمان $t = ۰$ آن برابر است با $V_+(X)$. توجه کنید که این برنامهٔ خطی همواره دارای جواب است چرا که ناحیهٔ موجه آن ناتهی است و تابع هدف از پایین کراندار است.

مشابهاً، اگر برنامهٔ خطی

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \lambda \\
\text{subject to} & Y \leqslant X \\
& U - Y/B_1 = 0 \\
& \lambda - U \cdot Q_1 = 0 \\
& \vdots \qquad \vdots \\
& \lambda - U \cdot Q_J = 0 \\
& \lambda \in \mathbb{R}, \quad Y \in \mathbb{R}^K, \quad U \in \mathbb{R}^K
\end{array}
\tag{۱-۲۶}
$$

را حل کرده و جواب بهینهٔ $(\lambda, Y, U)$ را برای آن بیابید، آنگاه $Y$ یک مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی است که $Y \leqslant X$ و ارزش زمان $t = 0$ آن برابر $V_-(X)$ است.

واقعیت این است که نه‌تنها برنامه‌ریزی خطی ما را قادر می‌سازد تا کمیت‌های موردعلاقه را به‌دست آوریم، بلکه چیزی اضافی را هم به‌عنوان جایزه به‌همراه دارد. برنامهٔ خطی دیگری را درنظر بگیرید:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \sum_{k=1}^{K} [X(\omega_k)/B_1(\omega_k)]\psi_k \\
\text{subject to} & \theta_1 + \cdots + \theta_J = 1 \\
& \psi_1 - Q_1(\omega_1)\theta_1 - \cdots - Q_J(\omega_1)\theta_J = 0 \\
& \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
& \psi_K - Q_1(\omega_K)\theta_1 - \cdots - Q_J(\omega_K)\theta_J = 0 \\
& \psi \in \mathbb{R}^K \quad \theta \in \mathbb{R}^J \quad \psi \geqslant 0
\end{array}
\tag{۱-۲۷}
$$

اگر $(\psi, \theta)$ یک جواب موجه دلخواه باشد، آنگاه

$$\psi = \theta_1 Q_1 + \theta_2 Q_2 + \cdots + \theta_J Q_J,$$

که مقداری نامنفی است. به‌علاوه، برای بردار سطری $e$ که همهٔ مؤلفه‌هایش 1 هستند داریم

$$e \cdot \psi = \theta_1 e \cdot Q_1 + \cdots + \theta_J e \cdot Q_J = \theta_1 + \cdots + \theta_J = 1$$

چون هر $Q_j$ یک اندازه احتمال است، $\psi$ هم می‌تواند به‌عنوان یک اندازهٔ احتمال تلقی شود. برای هر فرایند قیمت تنزیل شده $S_n^*$ داریم

$$E_\psi[\Delta S_n^*] = \theta_۱ Q_۱ \cdot \Delta S_n^* + \cdots + \theta_J Q_J \cdot \Delta S_n^* = ۰$$

چرا که هر $Q_j \in \mathbb{M}$ است. بنابراین $\psi$ را می‌توان به‌عنوان یک اندازهٔ قیمت‌گذاری خطی (اما نه لزوماً به‌عنوان یک اندازهٔ احتمال خنثی نسبت به ریسک) درنظر گرفت. به‌عبارت دیگر، ناحیهٔ موجه را می‌توان به‌عنوان بستار $\mathbb{M}$ تلقی کرد. نتیجه می‌شود که مقدار بهینهٔ تابع هدف در برنامهٔ خطی (۲۷-۱) دقیقاً مساوی $\sup\{E_Q[X/B_۱] : Q \in \mathbb{M}\}$ است.

حال نتیجه‌ای خیره‌کننده را که اهمیت زیربنایی دارد ملاحظه می‌کنیم. از نظریهٔ برنامه‌ریزی خطی برنامه‌های خطی (۲۵-۱) و (۲۷-۱) دوگان‌های همدیگر هستند. نواحی موجه هر دو برنامهٔ ناتهی هستند، لذا از نظریهٔ دوگانگی برنامه‌ریزی خطی، مقادیر بهینهٔ هر دو برنامه مساوی هستند. نتایج مشابهی برای برنامهٔ (۲۶-۱) هم برقرار است، پس این نتایج را به شرح زیر جمع‌بندی می‌کنیم:

**(۲۸-۱)** اگر $\mathbb{M} \neq \varnothing$ ، آنگاه برای هر مطالبهٔ مشروط $X$ داریم

$$V_+(X) = \sup\{E_Q[X/B_۱] : Q \in \mathbb{M}\}$$
$$V_-(X) = \inf\{E_Q[X/B_۱] : Q \in \mathbb{M}\}\cdot$$

البته، اگر $X$ دست‌یافتنی باشد، آنگاه مقدار مشترک $V_+(X) = V_-(X)$ قیمت زمان $t = ۰$ از آن است.

**مثال ۲-۱ (ادامه)** مطالبهٔ مشروط $X = (۱۰ , ۲۰ , ۳۰)$ را درنظر بگیرید. این مطالبه دست‌یافتنی نیست، چرا که در معادلهٔ (۲۱-۱) صدق نمی‌کند. با یادآوری اینکه $\mathbb{M}$ از تمامی اندازهٔ احتمال‌های $Q = (q , ۲ - ۳q , -۱ + ۲q)$ با $\frac{۱}{۲} < q < \frac{۲}{۳}$ تشکیل یافته است، سر راست است که (پس از تغییر مختصری در نماد در این مثال خاص) نشان داده شود که $E_q[X/B_۱] = ۲۷ - ۹q$. بنابراین،

$$V_+(X) = \sup_q E_q[X/B_۱] = \sup_q\{۲۷ - ۹q\} = ۲۷ - ۹\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲۲\frac{۱}{۲}$$

و

$$V_-(X) = \inf_q \ E_q[X/B_۱] = \inf_q\{۲۷ - ۹q\} = ۲۷ - ۹\left(\frac{۲}{۳}\right) = ۲۱$$

با حل نمودن برنامهٔ خطی (۱-۲۵) مطالبهٔ مشروط دست‌یافتنی معادل با $V_+(X)$ را به‌دست می‌آوریم؛ که عبارت است از $Y^* = (۳۰, ۲۰, ۱۵)$، که این را می‌توان با بررسی معادلهٔ (۱-۲۱) و اینکه قیمت زمان $t = ۰$ برای $Y$ مساوی $۲۲\frac{۱}{۲}$ است به‌دست آورد. مشابهاً، می‌توان به این رسید که مطالبهٔ مشروط متناظر با $V_-(X)$ عبارت است از $Y^- = (۳۰, \frac{۵۰}{۳}, ۱۰)$. ■

---

**مسئلهٔ ۱-۱۴** توضیح دهید که چرا مدل مثال ۱-۴ کامل نیست. مجموعهٔ تمامی مطالبات مشروط دست‌یافتنی را تعیین کنید. $V_+(X)$ و $V_-(X)$ را برای $X = (۴۰, ۳۰, ۲۰, ۱۰)$ حساب کنید.

**مسئلهٔ ۱-۱۵** از (۱-۲۳) استفاده کرده تا تحقیق کنید که آیا هیچ مقداری از قیمت توافقی $e$ در مثال ۱-۲ وجود دارد که اختیار خرید به‌ازای آن دست‌یافتنی باشد. مشابهاً، مشخص کنید که چه اختیارهای خریدی دست‌یافتنی هستند. فرض کنید $r = \frac{۱}{۹}$.

**مسئلهٔ ۱-۱۶** بلافاصله بعد از برنامهٔ خطی (۱-۲۵) بیان شد که می‌توان بردارهای $Q_j \in \mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$، $j = ۱, \ldots, J$، را مستقل اختیارکرد که به واسطهٔ آن پایه‌ای برای $\mathbb{W}^\perp$ خواهیم داشت، که بنا به فرض از بعد $J$ است. این گفته را به‌وسیلهٔ جبر خطی با دقت تحقیق کنید. بردارهای $Q_j$ را برای مثال ۱-۴ محاسبه کنید.

---

## ۱-۶ ریسک و بازده

به‌یاد آوریم که برای یک اندازه احتمال خنثی نسبت به ریسک $Q$ و برای $\omega \in \Omega$، کسر $Q(\omega)/B_۱(\omega)$ را گاهی قیمت وضعیتی متناظر با $\omega$ می‌نامیم. به این دلیل، متغیر تصادفی

$$L(\omega) \equiv \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

را **بردار قیمت وضعیت**[1] و یا **چگالی قیمت وضعیت**[2] می‌نامند. نتیجهٔ اصلی که قرار است که در این بخش به اثبات برسد آن است که پاداش ریسک یک پرتفوی دلخواه متناسب است با کواریانس[6] بین بازده چگالی قیمت وضعیت و بازده پرتفوی، نتیجه‌ای که شبیه به یک یافته اساسی از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای است.

با فرض اینکه قیمت $S_n(۰)$ در زمان $t = ۰$ مثبت باشد، بازده[3] $R_n$ برای ورقهٔ ریسکی $n$ را متغیر

1. state price vector 2. state price density 3. return