۳-۶- جواب عمومی معادلات غیرهمگن

برای یافتن جواب عمومی معادله خطی ناهمگن $L(y)=b(x)$ باید ابتدا جواب عمومی معادله همگن یعنی y_h و سپس جوابی از معادله غیرهمگن که فاقد پارامتر باشد و جواب خصوصی (y_p) نامیده می شود را به دست آوریم و از آنجایی که مجموع جواب همگن و غیرهمگن معادله خطی، جواب معادله غیرهمگن است در نتیجه جواب عمومی معادله ناهمگن به صورت $y=y_h+y_p$ خواهد بود. بنابراین لازم است روش های محاسبه جواب خصوصی (y_p) مطرح شوند.

تذکر: اگر بتوان معادله ناهمگن $L(y)=b(x)$ را به فرم $L(y)=b_۱(x)+b_۲(x)+...+b_k(x)$ نوشت آنگاه ابتدا هریک از k معادله $L(y)=b_i(x)$ $(i=۱,۲,...,k)$ را حل نموده و جواب خصوصی متناظر با هر $b_i(x)$ یعنی y_{p_i} را به دست آوریم و در نهایت :

$$y_p=\sum_{i=۱}^{k} y_{p_i}.$$

یعنی برای یافتن جواب خصوصی $L(y)=b(x)$ که $b(x)$ مجموع چند تابع است، کافیست ابتدا جواب خصوصی هر قسمت را محاسبه و حاصل را با هم جمع کرد.

۳-۷- جواب خصوصی معادلات با ضرایب ثابت (روش ضرایب نامعین)

جهت استفاده از این روش علاوه بر اینکه معادله ناهمگن $L(y)=b(x)$ باید با ضرایب ثابت باشد، $b(x)$ نیز باید تنها از توابعی باشد که از حل معادلات همگن ضرایب ثابت به دست می آید. یعنی $b(x)$ باید چند جمله‌ای، نمایی e^{rx}، $\cos, \sin$ یا جمع و ضربی از آنها باشد.

این روش با توجه به نوع تابع $b(x)$، جواب خصوصی را به صورتی که در آن ضرایب نامعین وجود دارد بیان می کند و سپس با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مقدار این ضرایب مجهول را مشخص می کنیم. دو حالت کلی برای $b(x)$ به صورت زیر می توان در نظر گرفت.

حالت اول: $b(x)=e^{rx}p_m(x)$: یعنی اگر $b(x)$ حاصلضرب یک چند جمله‌ای درجه m $(p_m(x))$ در عبارت نمایی (e^{rx}) باشد آنگاه:

$$y_p = x^s e^{rx} \times \underbrace{(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0)}_{\text{یک چندجمله ای کامل از درجه } m}$$

که در آن s مرتبه تکرار ریشه r از چند جمله ای مشخصه معادله همگن است. (ضرایب a_0 تا a_m با جایگذاری در معادله ناهمگن اولیه بدست می‌آیند)

اگر در $b(x)$ چند جمله‌ای از درجه صفر باشد در y_p چندجمله ای کامل از درجه صفر، a_0 در نظر گرفته می‌شود.

در حالت خاص که $b(x)$ فقط یک چندجمله ای است، کافی است $r=0$ و s مرتبه تکرار ریشه صفر معادله مشخصه در نظر گرفته شود.

حالت دوم : $b(x)=p_m(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x$ یا $b(x)=p_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ و یا $b(x)=e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x+p_k(x)\sin\beta x)$ که $m>k$: یعنی حاصلضرب یک چند جمله ای درجه m در عبارت نمایی در $\sin$ یا $\cos$، آنگاه:

$$y_p = x^s e^{\alpha x}(A(x)\sin\beta x + B(x)\cos\beta x)$$

که در آن $B(x), A(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه m می‌باشند و s مرتبه تکرار ریشه $\alpha\pm i\beta$ از معادله مشخصه (مفسر) معادله همگن متناظر است.

در حالتی که $b(x)$ فاقد جمله نمایی $e^{\alpha x}$ باشد، $\alpha=0$ و s مرتبه تکرار ریشه $\pm i\beta$ از معادله مشخصه است.

$A,\ Ax+B,\ Ax^2+Bx+C$

2.7.2) $r^2+1=0 \Rightarrow r^2=-1 \Rightarrow r=\pm i,\quad e^{0x}\sin x,\ e^{0x}\cos x \Rightarrow y_h=c_1\sin x+c_2\cos x$

$y_p=x^0(Ax+B), y'=A, y''=0 \Rightarrow 0+Ax+B=x+1 \Rightarrow y_p=x+1,\ \ y=y_h+y_p=c_1\sin x+c_2\cos x+x+1$

3.7.2) $r^2-5r+6=0 \Rightarrow (r-2)(r-3)=0 \Rightarrow r=2, r=3,\ \ e^{2x}, e^{3x} \Rightarrow y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

$y_p=x^0(A\sin x+B\cos x),\ y'=A\cos x-B\sin x,\ \ y''=-A\sin x-B\cos x$

$-A\sin x-B\cos x-5A\cos x+5B\sin x+6A\sin x+6B\cos x=\sin x \Rightarrow 5A+5B=1,\ -5A+5B=0 \Rightarrow B=\frac{1}{10}, A=\frac{1}{10}$

$y_p=\frac{1}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x \Rightarrow y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x$

4.7.2) $r^2-4=0 \Rightarrow r=\pm 2,\ \ y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$

$$y''-4y=x \Rightarrow y_{p_1}=x^0(Ax+B) \Rightarrow 0-4Ax-4B=x \Rightarrow A=\frac{-1}{4}, B=0 \Rightarrow y_{p_1}=\frac{-1}{4}x$$

$$y''-4y=e^{-x} \Rightarrow y_{p_2}=x^0e^{-x}A \Rightarrow y'=-Ae^{-x}, y''=Ae^{-x} \Rightarrow Ae^{-x}-4Ae^{-x}=e^{-x} \Rightarrow A=\frac{-1}{3}, y_{p_2}=\frac{-1}{3}e^{-x}, y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=\frac{-1}{4}x-\frac{1}{3}e^{-x}$$

$$y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}e^{-x}$$

5.7.2) $r^3-r^2=0 \Rightarrow r^2(r-1)=0 \Rightarrow r=0,0,1,\ \ e^{0x}, xe^{0x}, e^x \Rightarrow y_h=c_1+c_2x+c_3e^x$

$$y_p=x^2(Ax^2+Bx+C), y_p=Ax^4+Bx^3+Cx^2,\ y'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx,\ y''=12Ax^2+6Bx+2C, y'''=24Ax+6B$$

$$24Ax+6B-12Ax^2-6Bx-2C=12x^2+6x$$